Efficacité de la couche absorbante parfaitement adaptée (PML) dans le solveur de Maxwell par différences finies pour tout ordre et par la méthode spectrale

[1]P. Lee, [2]J.-L.Vay

[1]*LPGP, CNRS, Univ Paris-Sud, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay, France*

[2]*Lawrence Berkeley National Laboratory, Berkeley, CA 94720, USA*

Objectifs

- Application de la PML au solveur spectral
- Etude de l'efficacité de la PML dans le solveur de Maxwell à ordre élevé et par méthode spectrale
- Prédiction du coefficient de réflexion

Contexte

- L'Implémentation des conditions aux bords à frontière ouverte est essentielle pour résoudre numériquement les équations d'onde, notamment pour traiter l'accélération d'électrons par sillage laser. L'objectif principal est de réduire la réflexion sur les bords de la boîte numérique qui induisent des perturbations non-physiques.
- L'efficacité de la couche absorbante parfaitement adaptée (PML)[1] de Bérenger a été démontrée pour des schémas à différence finie aux premiers ordres. Nous nous sommes intéressés à généraliser ce schéma aux ordres élevés et également à une méthode spectrale.

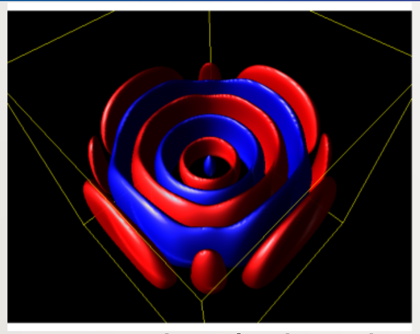


Fig. 1: La simulation d'une impulsion électromagnétique montre des réflexions aux frontières sans implémentation de la PML

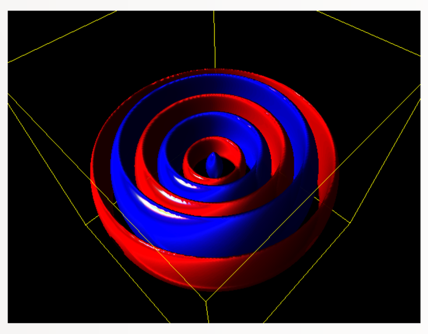


Fig. 2: L'implémentation de la PML permet une absorption efficace des ondes aux frontières

- La méthode spectrale, est plus difficile à mettre en œuvre, mais améliore sensiblement la précision du calcul pour un pas de temps donné. Notamment elle réduit fortement le bruit numérique qui souvent empêche d'avoir une estimation précise de l'émittance du faisceau d'électron.

[1] *J.-P. Berenger. J. of Comp. Phy., 114:185-200,1994.*

Principe de la couche absorbante parfaitement adaptée

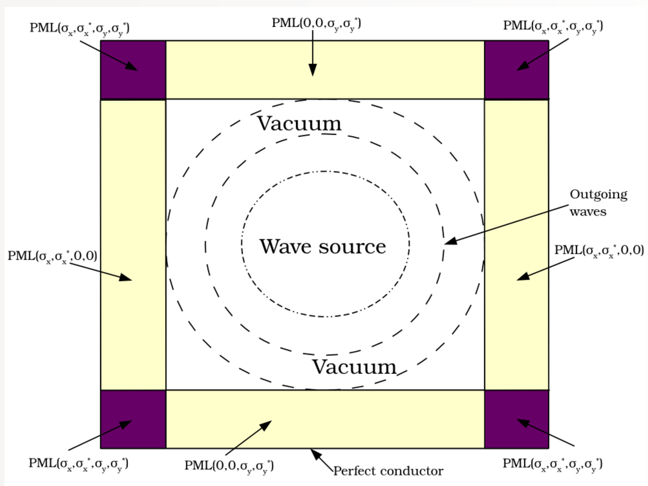
Mode transverse électrique (TE)

Dans un milieu linéaire ayant des conductivité électrique σ, et conductivité magnétique σ*, les équations de Maxwell s'écrivent:

$$\frac{\partial \mathrm{E_y}}{\partial t} + \sigma \mathrm{E_y} = -\mathrm{c}^2 \frac{\partial \mathrm{B_z}}{\partial \mathrm{x}}$$

$$\frac{\partial \mathrm{E_x}}{\partial t} + \sigma \mathrm{E_x} = \mathrm{c}^2 \frac{\partial \mathrm{B_z}}{\partial \mathrm{y}}$$

$$\frac{\partial \mathrm{B_z}}{\partial t} + \sigma^* \mathrm{B_z} = \frac{\partial \mathrm{E_x}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{E_y}}{\partial x}$$



Dans le milieu de la PML, on définit le champ électromagnétique avec quatre composantes qui satisfont les équations ci-dessous:

$$\frac{\partial \mathrm{E_x}}{\partial t} + \sigma_x \mathrm{E_x} = \mathrm{c}^2 \frac{\partial \mathrm{B_z}}{\partial \mathrm{y}}$$

$$\frac{\partial \mathrm{E_y}}{\partial t} + \sigma_y \mathrm{E_y} = -c^2 \frac{\partial \mathrm{B_z}}{\partial \mathrm{x}}$$

$$\frac{\partial \mathrm{B_{zy}}}{\partial t} + \sigma_y^* \mathrm{B_{zy}} = \frac{\partial \mathrm{E_x}}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \mathrm{B_{zx}}}{\partial t} + \sigma_x^* \mathrm{B_{zx}} = -\frac{\partial \mathrm{E_y}}{\partial x}$$

où (σ_x, σ_y, σ^*_x, σ^*_y) sont homogènes aux conductivités electrique et magnétique dans les directions x et y, et $B_z=B_{zx}+B_{zy}$.

Résolution par différences finies

$$\frac{\mathrm{Ex}^{n+1}_{i+1/2,j} - \mathrm{Ex}^{n}_{i+1/2,j}}{\Delta t} + \sigma_y \frac{\mathrm{Ex}^{n+1}_{i+1/2,j} + \mathrm{Ex}^{n}_{i+1/2,j}}{2} =$$

$$\frac{c}{\Delta y} \sum_{m=1}^{N} \mathrm{C}_m (\mathrm{Bz}^{n+1/2}_{i+1/2,j+(2m-1)/2} - \mathrm{Bz}^{n+1/2}_{i+1/2,j-(2m-1)/2})$$

avec C_m les coefficients de Fornberg (correspondent aux poids) et N l'ordre.

Résolution par la méthode spectrale

$$\frac{\mathrm{Ex}^{n+1}_{i+1/2,j} - \mathrm{Ex}^{n}_{i+1/2,j}}{\Delta t} + \sigma_y \frac{\mathrm{Ex}^{n+1}_{i+1/2,j} + \mathrm{Ex}^{n}_{i+1/2,j}}{2} =$$

$$c^2 \left[\mathcal{F}^{-1} \mathrm{i} k_y \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_y \Delta y/2} \left(\mathcal{F} \mathrm{Bz}^{n+1/2}_{i+1/2,j} \right) \right]$$

avec $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$ transformée de Fourier et transformée de Fourier inverse.

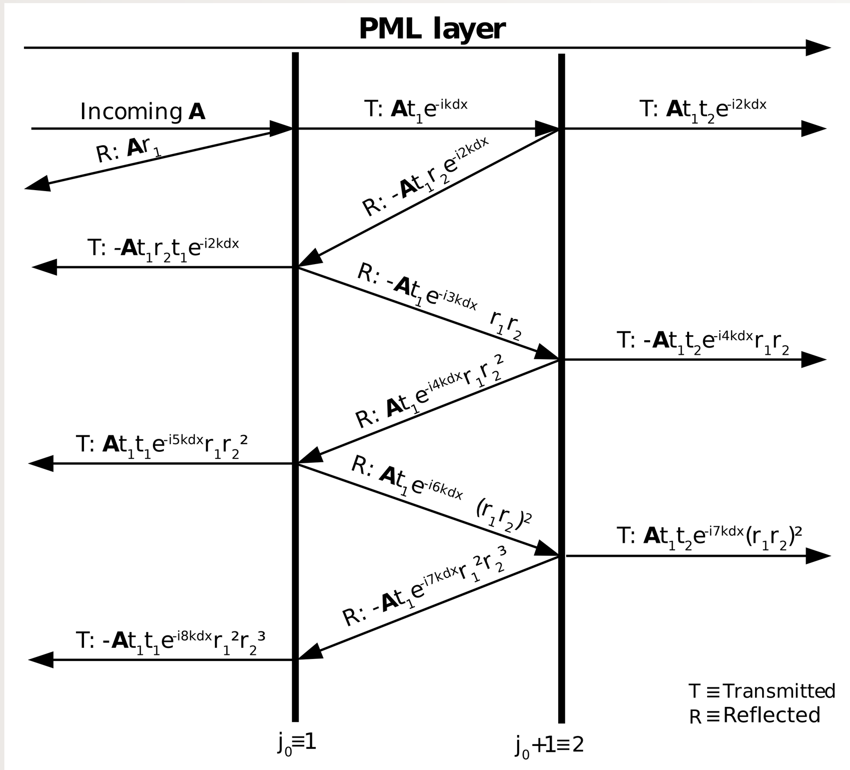
Les conductivités permettent l'absorption des champs électrique et magnétique à condition que les conditions suivantes soient vérifiées:

$$\frac{\sigma_x}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_x^*}{\mu_0} \quad \text{(de même pour y)}$$

Calcul analytique du coefficient de réflexion

Le coefficient de réflexion d'une onde plane se propageant à un angle quelconque peut être calculé[2].

Le calcul du coefficient de réflexion de la couche entière nécessite la connaissance de tous les coefficients à chaque plan de la couche (positions j, j+1, j+2..., avec j indice du point d'échantillonnage).



Les réflexions et transmissions de l'onde entre deux plans consécutifs, par analogie avec l'interféromètre de Fabry-Perot

Méthode

1. La PML s'étend de j_0 à j_0+N_L, avec N_L la profondeur de la PML.
2. On détermine les coefficients de r_j et de transmission t_j de chaque plan[3].
3. On calcule par récurrence le coefficient de réflexion total R_j pour l'ensemble des couches entre j et j_0+N_L.

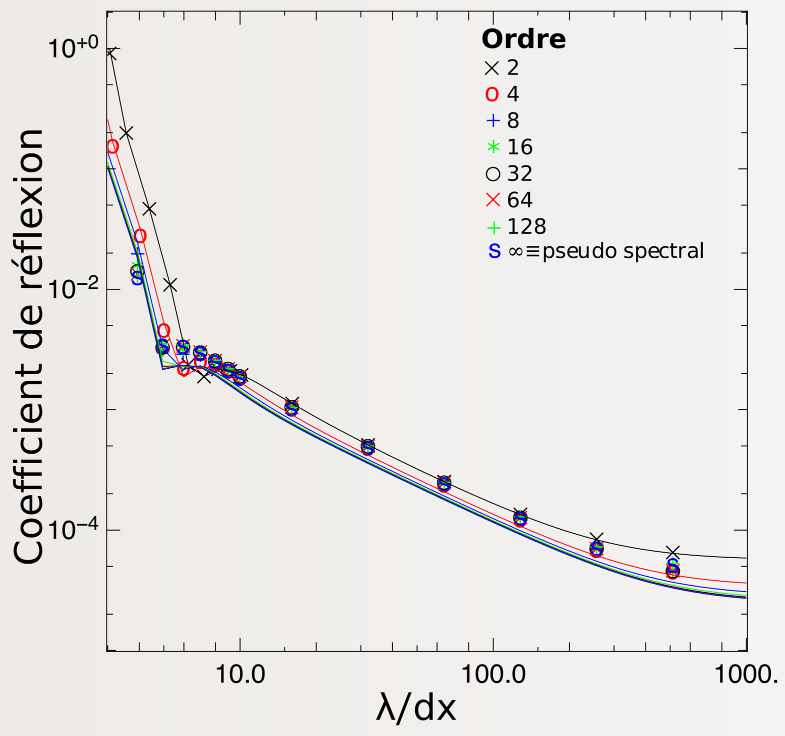
$$R_j = r_j - \frac{t_j R_{j+1} t_j \mathrm{e}^{-ik_x \Delta x}}{1 + r_j R_{j+1} \mathrm{e}^{-ik_x \Delta x}}$$

4. Le coefficient de réflexion total de la PML est donné par R_{j0}.

[2] *J.-L. Vay. J. of Comp. Phy., 183:367-399, 2002.*
[3] *P. Lee, J.-L. Vay. Comp. Phy. Comm.,194, 1-9 (2015).*

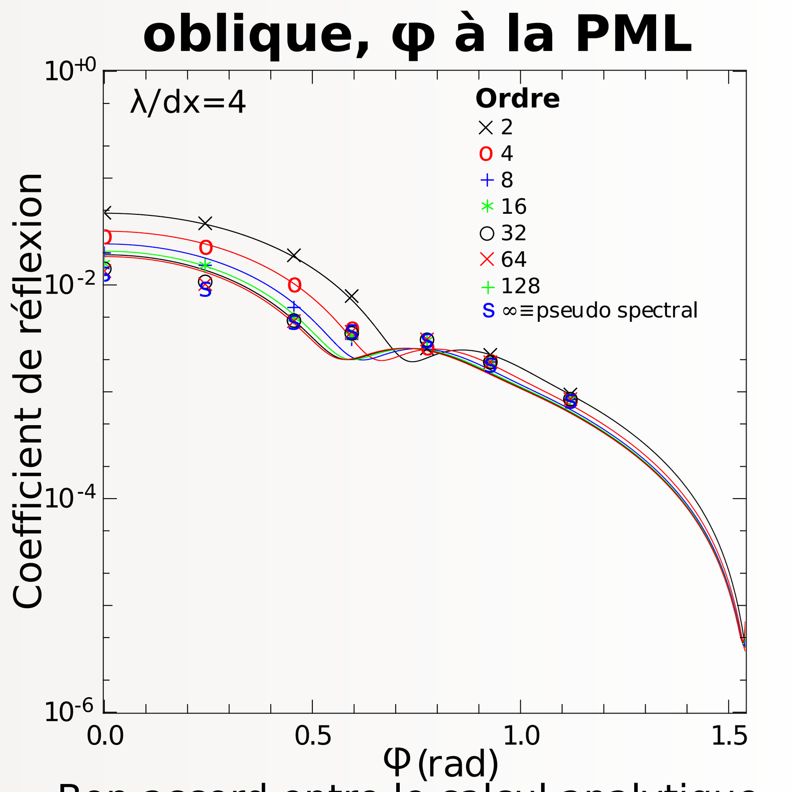
Resultats

Onde plane en incidence normale à la PML



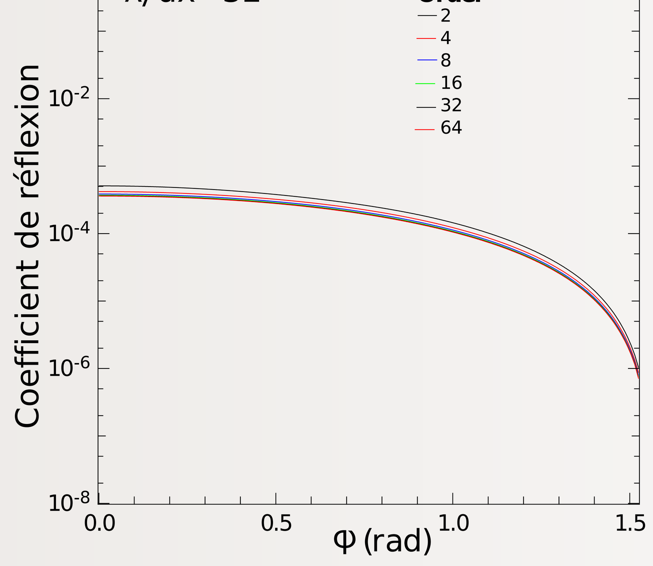
- Bon accord entre le calcul analytique et la simulation
- Le coefficient de réflexion:
  - diminue avec l'ordre du stencil
  - atteint une asymptote assez rapidement

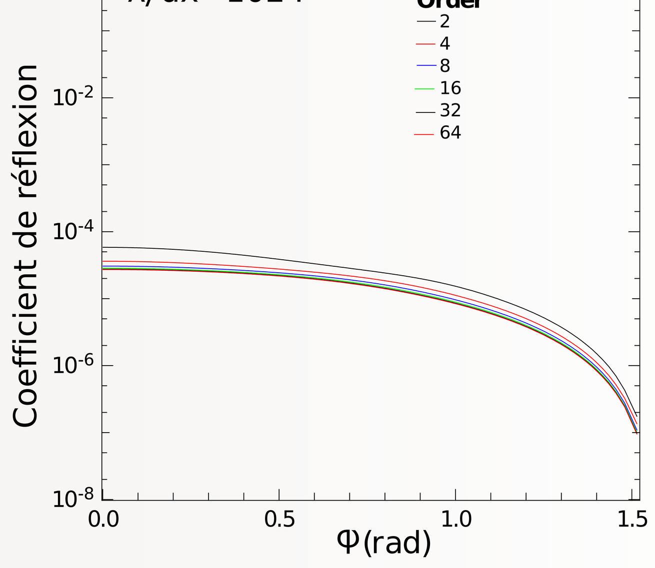
Onde plane en incidence oblique, φ à la PML



- Bon accord entre le calcul analytique et la simulation
- Le coefficient de réflexion:
  - décroît avec l'angle d'incidence de l'impulsion électromagnétique, φ
  - diminue également avec l'ordre du stencil

Prédiction du coefficient de réflexion en fonction de l'angle d'incidence et de λ/dx





Conclusions

- Les résultats analytiques[3] ont été confirmés par les simulations numériques.
- Tous deux montrent que l'efficacité de la PML est conservée dans les schémas de différences finies à tous les ordres de dérivation et également dans la méthode spectrale.

[3] *P. Lee, J.-L. Vay. Comp. Phy. Comm.,194, 1-9 (2015).*

Work supported by US-DOE Contracts DE-AC02-05CH11231. Used resources of NERSC, supported by US-DOE Contract DE-AC02-05CH11231.