

Sciences à l'École



Cahier pédagogique « Cosmos à l'École »



Opération en partenariat avec :



**« Sciences à l'Ecole »
Observatoire de Paris
61, avenue de l'Observatoire
75014 Paris
Tél/ fax : 01 40 51 22 02**

Contact pour l'opération : cosmos.ecole@obspm.fr

Table des matières

Introduction	5
1. Physique générale	7
a. Les rayons cosmiques	7
b. Relativité restreinte	11
i. Les insuffisances de la mécanique classique non relativiste	11
ii. 1905 : la solution proposée par EINSTEIN ou la naissance de la relativité restreinte	12
iii. Quelques conséquences de la relativité restreinte	12
iv. Dilatation des durées	14
v. Retour sur le temps de vie du muon	15
c. Zoologie des particules	17
i. Bref historique	17
ii. Le Modèle Standard	18
Les particules élémentaires du Modèle Standard	18
iii. Les interactions fondamentales	20
d. Physique des détecteurs	25
i. Interaction avec la matière	25
ii. Application aux détecteurs	29
2. Présentation du cosmodétecteur	31
a. Description générale	31
b. Les scintillateurs	31
c. Les photomultiplicateurs	32
d. Electronique du détecteur	33
i. Le discriminateur	34
ii. Principe de la coïncidence	34
3. Les fiches pédagogiques	37
a. Prise en main et réglages	37
i. Prise en main	37
ii. Réglage de la tension des photomultiplicateurs	Erreur ! Signet non défini.
iii. Réglage des seuils de détection	42
b. Mesures	44
i. Distribution angulaire	44
iv. Le temps de vie du muon	46
v. La provenance des muons	50
4. Introduction expérimentale à la mesure	51
a. Erreur	51
i. Introduction générale	51
ii. Introduction : influence du temps de comptage sur l'allure de la courbe	54
iii. Les fonctions de distribution	61
b. Traitement de données expérimentales	78
i. Tracé d'une courbe modélisant les données expérimentales : ajustement d'un modèle	78

ii. Utilisation du critère du χ^2	78
iii. Utilisation de la méthode des moindres carrées : application au temps de vie du muon	83
LEXIQUE	88

Introduction

L'opération « Cosmos à l'Ecole », menée par « Sciences à l'Ecole », en partenariat avec l'IN2P3, le CPPM et le CERN, met à disposition des détecteurs de muons*¹, appelés cosmodétecteurs, à des établissements scolaires afin d'encourager des projets pédagogiques innovants et de contribuer à développer des vocations scientifiques chez les jeunes.

Le dispositif « Sciences à l'Ecole » :

« Sciences à l'Ecole » est un dispositif ministériel, dont l'objectif est de promouvoir les sciences auprès des enseignants et élèves du secondaire. Le comité national de pilotage est composé de son président d'honneur, Claude Cohen-Tannoudji, son président, Pierre Encrenaz, professeur émérite de l'Université Pierre et Marie Curie et académicien des Sciences ; son vice-président, Jean-Yves Daniel, inspecteur général de physique-chimie ; des directeurs généraux de l'enseignement scolaire, de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation ; ainsi que du doyen de l'inspection générale de l'éducation nationale, ou de leurs représentants. Les différentes actions menées par « Sciences à l'Ecole » sont :

- organisation de concours nationaux (C.Génial, C. Génial - Collège...),
- pilotage de la participation française aux concours internationaux (EUCYS, Science on Stage, CASTIC),
- pilotage de la participation aux Olympiades Internationales de biologie, physique, chimie et sciences de la Terre,
- organisation et pilotage de plans d'équipement : prêt aux établissements scolaires de stations météorologiques, sismiques, détecteurs de muons, matériel astronomique et kits génomiques,
- financement de productions didactiques (LUNAP) et d'interventions de chercheurs dans les classes.

Chacune de ces actions se fait sous la conduite de comités scientifiques composés de chercheurs, d'enseignants, d'inspecteurs généraux et régionaux, en partenariat avec de grands organismes (Observatoire de Paris, Météo France, IN2P3, CPPM, CERN, Géoazur, Génoscope, MNHN, CNFM, Universités, ...). Ces actions sont soutenues par la fondation C.Génial.

Organisation :

Comme tous les plans d'équipements pilotés par « Sciences à l'Ecole », « Cosmos à l'Ecole » est fondé sur un partenariat entre les institutions scientifiques (ici les laboratoires de l'IN2P3) et « Sciences à l'Ecole ». Ce plan est instruit par un comité national de pilotage composé de chercheurs, enseignants et représentants de l'Education Nationale. Ce comité propose au président de « Sciences à l'Ecole » l'attribution des détecteurs, suit et évalue l'activité scientifique du plan d'équipement. Les enseignants sont sélectionnés à partir d'un appel à projets dont les qualités scientifique et pédagogique sont évaluées.

Le détecteur :

Le cosmodétecteur a été créé, en partenariat avec « Sciences à l'Ecole », à partir de la Roue Cosmique, détecteur pédagogique développé par José BUSTO au CPPM (Centre de Physique des Particules de Marseille, laboratoire IN2P3).

Il est composé de :

- trois photomultiplicateurs*,
- un scintillateur* dédié au temps de vie du muon,
- un scintillateur basé sur l'effet Cerenkov*,
- une interface pour l'enregistrement des données.
- une partie électronique pour l'acquisition des données,



Crédit : « Sciences à l'Ecole »

¹ Chaque terme suivi d'un astérisque est défini dans le lexique en fin de document.

Les expériences réalisables sont entre autres : la distribution angulaire des muons, le temps de vie du muon, l'étude des gerbes* de particules...

Formation :

Chaque enseignant sélectionné doit avoir suivi deux stages de formation : le premier d'une semaine au CERN (financé par l'IN2P3) sur la physique des particules et des détecteurs, et le second de quelques jours au CPPM sur l'utilisation du détecteur. Un certain nombre d'enseignants ayant suivi ces deux stages sont encouragés à former d'autres enseignants à l'utilisation du détecteur dans le cadre de Plans Académiques de Formation.

Accompagnement :

Chaque prêt du cosmo détecteur est accompagné :

- *d'un cahier pédagogique* : celui-ci comprend une description du fonctionnement du détecteur et des exemples d'activités à mener en classe. Il est complété par des pages internet dédiées : <http://www.sciencesalecole.org/nos-actions-didactiques/cosmos-a-lecole.html> et par un forum d'échange pour les enseignants.
- *d'un parrain* : celui-ci est un référent scientifique auquel peut s'adresser l'enseignant pour la compréhension des résultats obtenus et de la physique des particules en général. Le parrainage peut se composer, par exemple, d'une à deux conférences et d'échanges de mails avec l'enseignant pour un prêt de 6 mois.
- *d'un correspondant académique de « Sciences à l'Ecole »* : il permet de faciliter la mise en place des projets dans les établissements concernés

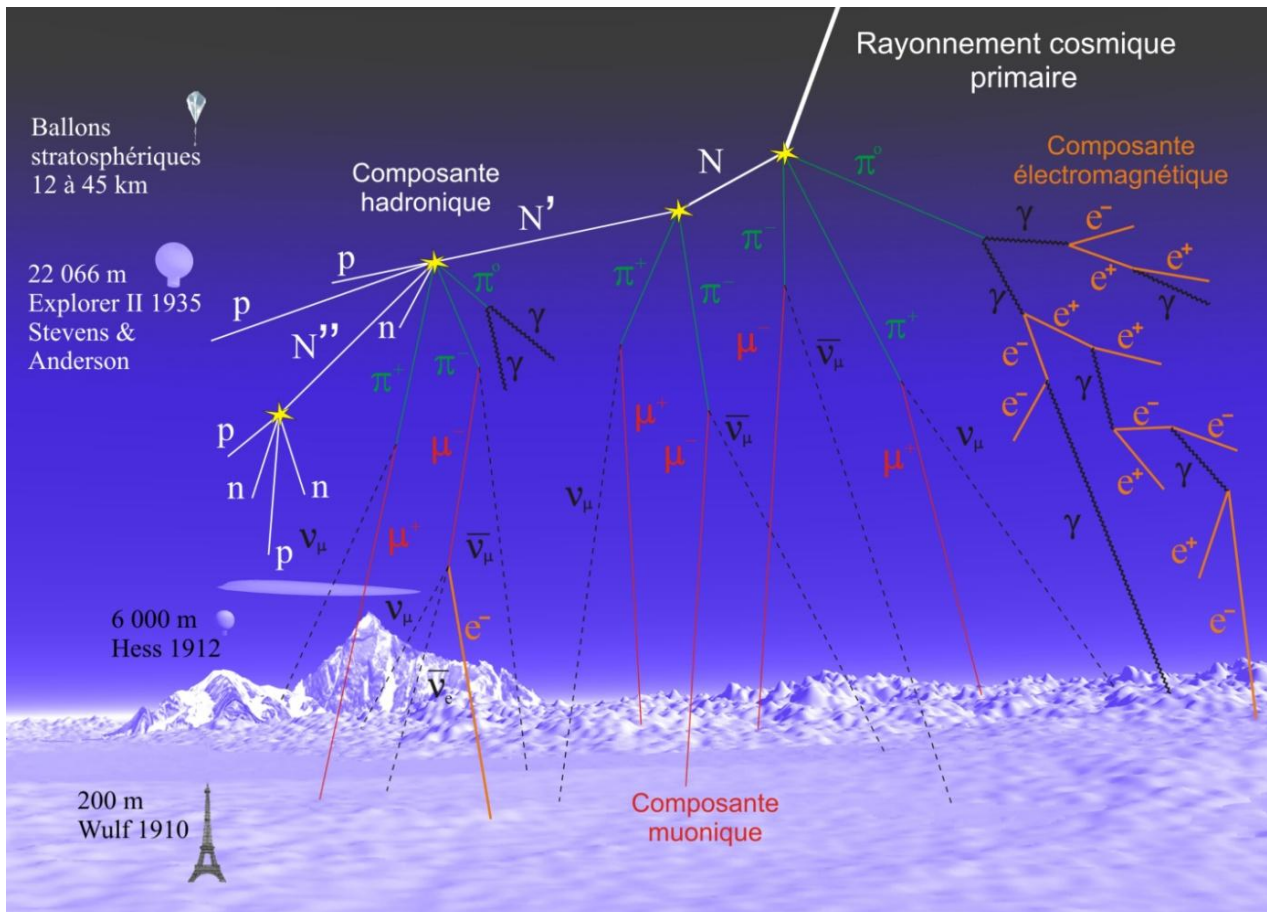
Quelques chiffres :

- **15** cosmodétecteurs prévus dans les établissements en janvier 2012.
- **90** enseignants formés au CERN dont **31** formés également au CPPM.
- **3** PAF prévus pour 2011/2011

1. Physique générale

a. Les rayons cosmiques

Les rayons cosmiques sont composés de particules énergétiques provenant de l'espace produisant des particules dites secondaires à leur entrée dans l'atmosphère : elles forment alors une gerbe de particules.

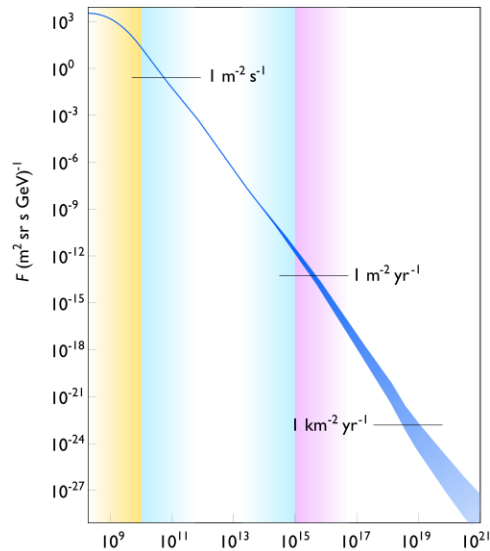


Formation de gerbe de particules par interaction des rayons cosmiques avec l'atmosphère.
Crédit : C. Lagoute

Composition :

A leur arrivée dans la haute atmosphère, les rayons cosmiques (formant le rayonnement dit primaire) peuvent provenir de très loin (au-delà de notre galaxie) et sont donc forcément composés de particules stables. La composition est la suivante :

- principalement des protons : 87%
- des noyaux atomiques : 12% (essentiellement de l'hélium)
- des électrons : 1%



Spectre en énergie des rayons cosmiques et flux correspondant. Crédit : wikipedia.

Provenance :

Le large spectre en énergie observé (voir figure ci-dessus) est expliqué en partie par les origines diverses des rayonnements cosmiques :

- solaires : liés aux éruptions solaires (10 à 100 MeV) permettant l'accélération de particules (protons et noyaux) à une vitesse proche de celle de la lumière ;
- accélérations par des champs magnétiques résultant d'explosions de supernovae (100 MeV jusqu'à 10 GeV) ;
- quasars, AGN² (noyaux de galaxies particulièrement lumineux) peut aller jusqu'à 10¹¹ GeV.

Remarques :

- le flux est d'autant plus faible que les particules sont énergétiques (voir figure ci-dessus) ;
- les vents solaires ont tendance à nous protéger des rayonnements cosmiques de basse énergie en raison du champ magnétique qu'ils créent ;
- il est admis que la majorité des rayons cosmiques d'énergie allant jusqu'à 10⁹ GeV proviennent de notre galaxie. Au-delà de cette valeur, l'isotropie du rayonnement³ laisse supposer une origine extra galactique.

Interaction avec l'atmosphère

En entrant dans l'atmosphère le rayonnement primaire interagit avec les électrons et les noyaux des atomes ainsi qu'avec les molécules composant l'air. La composition du rayonnement cosmique change lors de sa propagation dans l'atmosphère : il y a développement d'une gerbe de particules. Chaque particule du rayonnement primaire interagit suivant un mécanisme différent avec les particules de l'atmosphère, donc l'atténuation de leur flux jusqu'au sol dépend des particules.

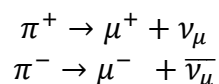
- *Protons et noyaux*

Par collision avec les noyaux de l'atmosphère, les protons et autres noyaux composant les rayons cosmiques produisent par interaction forte des mésons* (essentiellement des pions : π^0 , π^+ et π^-). Ces particules forment la partie dite hadronique* du rayonnement cosmique. Si les mésons créés possèdent une énergie suffisante, de nouvelles collisions conduiront à la production de nouveaux mésons. Sinon les mésons produits se désintègrent :

² Active Galactic Nucleus.

³ Contrairement aux rayonnements qui proviennent de notre galaxie de directions particulières, liées à notre position excentrée dans la Voie lactée.

- les pions neutres se désintègrent immédiatement ($\tau \sim 10^{-16}$ s) en deux photons*. Ceux-ci contribuent alors à la partie électromagnétique de la gerbe.
- les pions chargés, de durée de vie plus longue ($\tau \sim 2,6 \cdot 10^{-8}$ s), se désintègrent en muon et neutrino* suivant les réactions :



Ces muons sont détectables au sol.

- *Electrons et photons*

Les électrons⁴ et les photons provenant du rayonnement primaire ou de la désintégration des particules forment la partie électromagnétique du rayonnement cosmique.

- Les électrons perdent de l'énergie lors leur traversée de l'atmosphère par rayonnement de freinage*. Celui-ci est lié au passage d'une particule chargée près du champ coulombien d'un atome : l'accélération de celle-ci est alors modifiée, entraînant un rayonnement électromagnétique (production d'un photon suivant : $e^- \rightarrow \gamma + e^-$) et une perte d'énergie.
- Les photons créent des paires électrons-positrons qui perdront à leur tour de l'énergie par rayonnement de freinage.

La partie électromagnétique interagit avec l'azote de l'air : celui-ci devient fluorescent au passage du rayonnement cosmique⁵.

Composition au niveau du sol

En raison des interactions et des durées de vie des particules, au niveau du sol, il ne reste quasiment que des muons (75%) d'énergie moyenne d'environ quelques GeV et des neutrinos (peu interactifs). Les muons perdent de l'énergie à un taux de 2 MeV par g/cm^2 ⁶ et la profondeur de l'atmosphère correspond à environ 1000 g/cm^2 . Les muons perdent donc environ 2 GeV avant d'atteindre le sol. Cette perte d'énergie se fait par rayonnement de freinage. Le flux de muon au niveau de la mer est d'environ 1 muon par cm^2 par minute (ce qui conduit à ce que notre corps soit traversé par 100 000 muons par heure).

Effet relativiste

Compte tenu de la durée de vie moyenne des muons ($\tau \sim 2,2 \cdot 10^{-6}$ s), si ceux-ci ont une vitesse proche de celle de la lumière, ils devraient parcourir une distance : $d = v \cdot t = 660$ m.

La dilatation des durées liée à la relativité restreinte justifie le fait que l'on observe des muons au sol, formés au niveau de la stratosphère (entre 10 à 50 km d'altitude).

Historique

Un rayonnement d'origine inconnue provoquant un bruit parasite affectant tous les détecteurs d'ionisation, le père Théodore WULF réalisa des mesures en haut de la Tour Eiffel en 1907 afin d'identifier leur origine. Il remarqua que le rayonnement terrestre se trouvait bien diminué mais que le taux n'était pas nul : un rayonnement inconnu devait provenir de l'espace. Pour tester cette hypothèse, Viktor F. HESS effectua des mesures en ballon : en 1912, il montra que le taux de rayonnements inconnus augmentait fortement avec l'altitude. Il partagea le prix Nobel de physique

⁴ Et positrons.

⁵ Cette propriété est utilisée pour étudier les propriétés du rayonnement cosmique : forme, direction et énergie (notamment par le détecteur Auger).

⁶ Cette unité est utilisée pour traduire la surface et le type de matériau traversé.

en 1936 avec Carl ANDERSON qui découvrit le positron, première particule d'antimatière grâce à une chambre de WILSON (chambre à brouillard) traversée par le rayonnement cosmique. L'étude de ce dernier a également permis la découverte du muon (1936), du pion (1947) et du kaon* (1947). L'étude de la physique des particules fut après principalement menée à l'aide d'accélérateurs de particules. Le rayonnement cosmique est également étudié comme par l'Observatoire Pierre AUGER (Argentine) afin de déterminer la provenance des rayons cosmiques les plus énergétiques.

Bibliographie :

- *Revue Elémentaire*, n°3, IN2P3 : <http://elementaire.web.lal.in2p3.fr>
- *Réalisation d'un détecteur de muons*, C. Lagoute : <http://ch.lagoute.free.fr/CosmoDCL/>
- *Cosmic Rays*, K. Nakamura et al. : http://pdg.lbl.gov/2011/reviews/contents_sports.html
- *Cosmic rays at earth*, P. K. F. Grieder, édition Elsevier

b. Relativité restreinte

Comment expliquer qu'un muon ayant un temps de vie* de $2,2 \mu\text{s}$ et se formant à environ 10 km d'altitude puisse être détecté à la surface terrestre par le cosmodétecteur ? En effet, si on fait un simple calcul, en considérant que ce muon se déplace à la vitesse de la lumière, il ne devrait parcourir que 660 m ! Comment expliquer cette différence ? Doit-on considérer que le muon se déplace à une vitesse supérieure à celle de la lumière ?

Les réponses à ces questions nécessitent une nouvelle manière d'appréhender la notion d'espace et de temps et une nouvelle manière de décrire les mouvements des corps ; un nouveau cadre théorique est donc nécessaire : celui-ci a été élaboré par Einstein en 1905, et prendra le nom de relativité restreinte.

i. Les insuffisances de la mécanique classique non relativiste

Dans la deuxième moitié du XIXe siècle, J. C. MAXWELL (1831-1879) établit les équations régissant le comportement du champ électrique E et du champ magnétique B ainsi que le lien entre ces deux champs. H. R. HERTZ (1857-1894), en 1887, démontre que la lumière n'est rien d'autre qu'une onde électromagnétique et est donc régie par les équations de MAXWELL. Au XIXe siècle, toutes les ondes connues (ondes sonores, ondes sismiques etc.) avaient besoin d'un milieu matériel pour se propager, la question qui se posait alors était de savoir dans quel milieu se propageait la lumière.

L'hypothèse de l'existence d'un milieu appelé « éther » – du nom du cinquième élément de la théorie défendue par ARISTOTE – dans lequel la lumière se propagerait, fit un large consensus dans la communauté scientifique de l'époque : il ne restait plus qu'à mettre en évidence ce milieu.

Expérience de MICHELSON et MORLEY

Dans la vie courante, si une personne A se déplace à une vitesse v par rapport au référentiel terrestre, et une personne B à une vitesse v' par rapport à A, B aura alors une vitesse $v + v'$ par rapport à la Terre. C'est à partir de ce principe bien établi depuis GALILEE qu'A. A. MICHELSON (1852-1931) et E. W. MORLEY (1838-1923) vont mettre au point une expérience d'interférométrie⁷ pour mettre en évidence le mouvement relatif de la Terre par rapport à l'éther. Ils devaient observer un très léger déplacement des franges d'interférence lorsqu'ils tournaient les bras de l'interféromètre. Leurs résultats, malgré de notables progrès dans la précision des mesures au cours des différentes tentatives, ne permit pas de mettre en évidence ce mouvement : l'hypothèse de l'éther sembla alors discutable et les résultats de MICHELSON et MORLEY sont inexplicables dans le cadre théorique de l'époque.

Les physiciens F. FITZGERALD (1851-1901), H. A. LORENTZ (1853-1928) et H. POINCARÉ tentèrent d'expliquer les résultats de MICHELSON et MORLEY à l'aide de prothèses conceptuelles et d'artifices mathématiques : il fallait sauver l'éther – la lumière se propage nécessairement dans un milieu – et suivant les cadres de la cinématique galiléenne !

Un autre problème existait puisque la propagation de la lumière n'était pas compatible avec la cinématique galiléenne : les équations de MAXWELL n'étaient pas invariantes par changement de référentiel galiléen. En effet, une force de type mécanique est invariante et a donc la même forme lorsqu'on l'exprime dans un référentiel galiléen A ou dans un référentiel galiléen B en mouvement rectiligne uniforme de vitesse v par rapport à A : la force de gravitation sera la même et aura la même valeur dans le référentiel A ou le référentiel B puisque l'expression de la force de gravitation ne dépend pas de la vitesse de déplacement de la particule considérée. Mais, si l'on considère la force de LORENTZ – que l'on déduit des équations de MAXWELL – qui s'applique à une particule baignant dans un champ électromagnétique, cette force sera différente si on l'exprime dans le référentiel A ou dans le référentiel B. On a dans le référentiel A pour une particule P de charge q et

⁷ Voir par exemple : http://fr.wikipedia.org/wiki/Expérience_de_Michelson-Morley

de vitesse \mathbf{v}' plongée dans un champ électrique \mathbf{E} et un champ magnétique \mathbf{B} : $\mathbf{F}_{\text{part}}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}'\times\mathbf{B})$ et dans le référentiel B: $\mathbf{F}'_{\text{part}}=q(\mathbf{E}+(\mathbf{v}'+\mathbf{v})\times\mathbf{B})$. Ainsi : $\mathbf{F}_{\text{part}} \neq \mathbf{F}'_{\text{part}}$.

ii. 1905 : la solution proposée par EINSTEIN ou la naissance de la relativité restreinte

En 1905, un jeune inconnu A. EINSTEIN, employé par le bureau des brevets de Genève, va bouleverser les concepts antérieurs d'espace et de temps. Il part alors de l'interrogation suivante : que se passe-t-il si je me déplace à la vitesse de la lumière? Un autre problème dérange profondément EINSTEIN : la non invariance des équations de MAXWELL par changement de référentiel galiléen en cinématique galiléenne. Celui-ci va répondre à ces deux difficultés par l'article fondateur de la théorie de la relativité restreinte publiée en 1905 dans la revue *Annalen der Physik*. Dans cet article, EINSTEIN montre que pour assurer l'invariance des équations de MAXWELL par changement de référentiel galiléen (et par là-même de la force de LORENTZ), il fallait considérer que la lumière se propage dans le vide – exit l'éther – et que la vitesse de la lumière dans le vide reste égale à c et est indépassable quelque soit le référentiel galiléen considéré : la loi d'additivité des vitesses n'existe pas pour la lumière dans le vide ! Ainsi si l'on prend nos deux référentiels considérés au paragraphe précédent, la vitesse de la lumière sera égale à c dans ces deux référentiels. Maintenant, si on a une particule P donnée de vitesse v dans le référentiel A, pour obtenir la vitesse v' de cette particule dans le référentiel B, il ne faut plus utiliser la transformation de GALILEE mais la transformation de LORENTZ⁸.

iii. Quelques conséquences de la relativité restreinte

Les notions d'espace et de temps sont maintenant totalement imbriquées (comme le montre la transformation de LORENTZ), le temps et les variables d'espace sont interdépendantes : on parle d'espace-temps. La notion de causalité est elle aussi, totalement bouleversée.

Si l'on considère le diagramme ci-dessous, construit dans un référentiel donné à un temps donné ; on a, à l'intersection des axes, la particule étudiée. Ce qui est à l'intérieur du cône et au-dessus de l'intersection des deux axes est l'avenir de la particule et ce qui se trouve à l'intérieur du cône et au-dessous de l'intersection est le passé de la particule. Le reste de l'espace n'a aucun lien et ne peut avoir aucun lien avec l'avenir ou le passé de la particule étudiée, tout simplement parce que la particule ne peut pas avoir une vitesse supérieure à celle de la lumière ce qui borne l'avenir et le passé de celle-ci. Ainsi, les lignes formant le cône représentent les trajectoires limites possibles de la particule dans le cas où celle-ci se déplacerait à la vitesse de la lumière c .

⁸ Considérons deux référentiels galiléen A et B se déplaçant l'un par rapport à l'autre à une vitesse v selon l'axe des x . Soit x, y, z, t les coordonnées d'espace-temps d'une particule dans A, si l'on veut exprimer les coordonnées x', y', z', t' de cette même particule dans le référentiel B, alors on a d'après la transformation de Galilée :

$$\begin{aligned}x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t\end{aligned}$$

Dans le cadre de la relativité restreinte, la transformation est différente (même si elle est une transformation limite dans le cas des vitesses faibles de la transformation galiléenne), on a alors d'après la transformation de Lorentz :

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right)\end{aligned}\quad \text{avec } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\text{ et } \beta = \frac{v}{c}$$

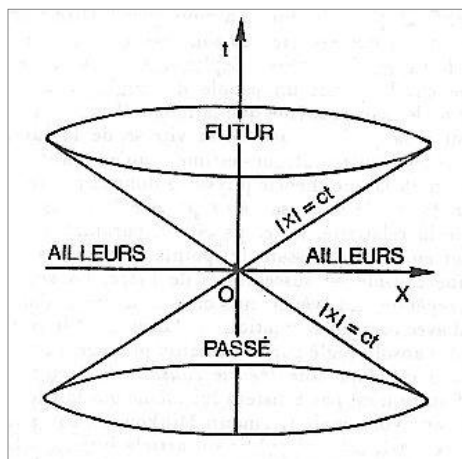
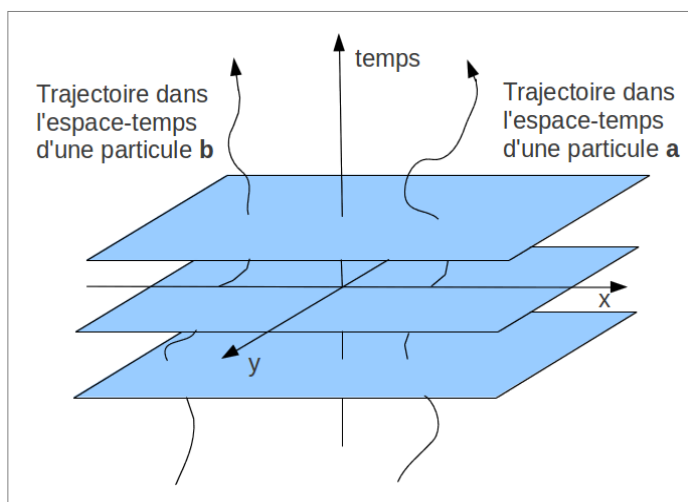
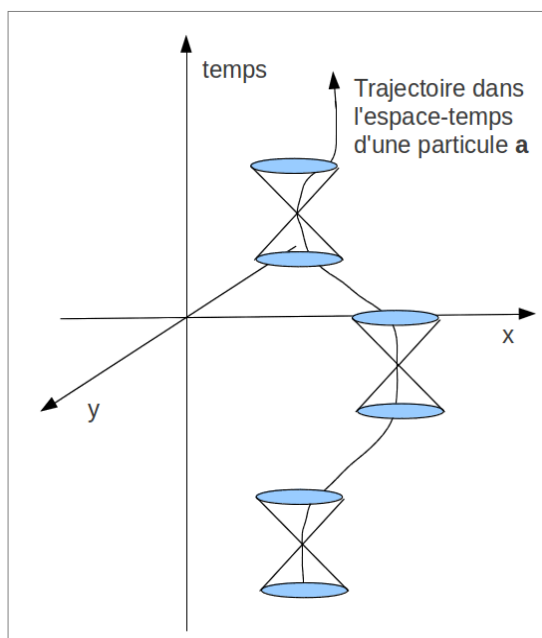


Diagramme d'espace-temps à deux dimensions d'espace et une de temps. Crédit : CERN.

On peut alors comparer la description du mouvement dans une description galiléenne (A) et dans une conception relativiste (B).



(A)



(B)

Description d'une trajectoire d'une particule dans une description galiléenne (A) et dans une description relativiste (B). Crédit : J.-C. Pelhate.

Dans la description galiléenne (ou newtonienne), on peut représenter les plans d'espace superposés les uns sur les autres à des intervalles de temps égaux : cela signifie que quel que soit l'endroit où l'on se trouve, le temps est le même pour toutes les particules et l'ensemble de ces particules ne sont pas limitées dans leur avenir ou même leur passé. Dans la description relativiste, il en va tout autrement, à chaque instant et à chaque position de la particule, on a un cône qui définit le passé et l'avenir de la particule : ce qui est arrivé précédemment à la particule est nécessairement dans la partie inférieure du cône et ce qui va lui arriver nécessairement dans la partie supérieure du cône.

iv. Dilatation des durées

Une autre conséquence importante de la relativité restreinte est ce que l'on appelle la dilatation des durées. On considère l'expérience de pensée suivante : un train se déplace à une vitesse constante v sur des rails horizontaux et droits. À l'intérieur d'un wagon de ce train, sur le sol, est placé un générateur de flash lumineux et à la verticale de cet appareil, sur le plafond du wagon, est placé un miroir. Quel est le temps de parcours du flash lumineux pour faire l'aller-retour « sol-plafond » du wagon ?

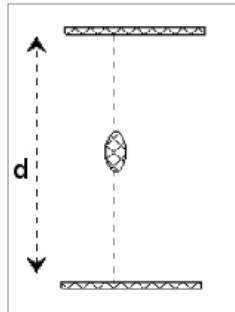


Schéma de la trajectoire du rayon lumineux dans le référentiel du wagon. Crédit : CERN.

D'après le postulat d'EINSTEIN, le flash lumineux aura la même vitesse c si l'on considère le référentiel lié au wagon ou le référentiel terrestre. Déterminons, tout d'abord, le temps de l'aller-retour dans le référentiel lié au wagon. Dans ce cas, si on appelle τ le temps de parcours dans ce référentiel et d la hauteur du wagon, on a : $\tau = \frac{2d}{c}$.

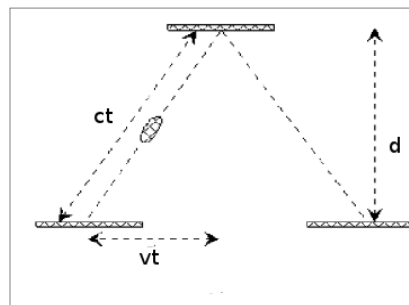


Schéma de la trajectoire du rayon lumineux dans le référentiel terrestre. Crédit : CERN.

Dans le référentiel terrestre, on appelle Δt le temps de l'aller-retour. Si on applique le théorème de Pythagore, on obtient :

$$\left(\frac{v \cdot \Delta t}{2}\right)^2 + d^2 = \left(\frac{c \cdot \Delta t}{2}\right)^2$$

Soit $\Delta t = \frac{2d}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \tau$ avec $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

On constate que $\tau \neq \Delta t$ et que $\Delta t = \gamma \tau$: le temps que le flash met pour faire l'aller-retour est différent selon le référentiel dans lequel on étudie son mouvement.

Cette relation est aussi valable lorsque l'on étudie une particule se déplaçant à une vitesse v dans un référentiel galiléen A. Dans ce cas, τ est appelé le temps propre de la particule, c'est-à-dire le temps qui s'écoule dans le référentiel où la particule est au repos (appelé référentiel propre) et Δt est le temps qui s'écoule dans le référentiel A. Ainsi, si on a une particule qui se déplace à une vitesse v proche de c , on a $\gamma \gg 1$ et $\Delta t \gg \tau$ et si notre particule a une vitesse v proche de zéro, $\gamma \approx 1$ donc $\Delta t \approx \tau$ (dans ce cas, on peut considérer la transformation de GALILEE comme valable, c'est ce que l'on fait tous les jours dans la vie courante).

v. Retour sur le temps de vie du muon

Etude du déplacement du muon dans le cadre non relativiste

Le muon a un temps de vie moyen d'environ $2,2 \mu\text{s}$. Si celui-ci se déplace à une vitesse proche de celle de la lumière alors la distance qu'il est capable de parcourir durant ce temps de vie sera de : $d=2,2 \times 10^{-6} \times 3 \cdot 10^8 \text{ m}$, soit une distance d'environ 660 m. Or les muons sont produits dans la haute atmosphère (15-20 km d'altitude), donc d'après le calcul précédent, peu d'entre eux devraient atteindre le sol.

En effet, supposons que les muons sont produits à une altitude d'environ 15 km au dessus du sol. Si on considère qu'ils se déplacent à la vitesse de la lumière alors le temps nécessaire pour parcourir les 15 km serait de :

$$t = x/c$$

$$t = (15 \times 10^3)/(3 \times 10^8)$$

$$\text{i.e. } t = 5 \times 10^{-5} \text{ s.}$$

Or le temps de vie moyen du muon est $\tau = 2.2 \times 10^{-6} \text{s}$, on peut calculer le taux de muons créés à 15 km d'altitude et arrivant au niveau du sol :

$$N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\frac{5 \cdot 10^{-5}}{2,2 \cdot 10^{-6}}}$$

$$\frac{N}{N_0} = 1,3 \cdot 10^{-10}$$

On en déduit que presque aucun muon n'est attendu au niveau du sol. Expérimentalement, on mesure cependant que l'intensité de muons au sol est de 1 par cm^2 par minute. Le seul moyen d'expliquer cette intensité de muons au sol est d'étudier le déplacement du muon dans le cadre relativiste.

Etude du déplacement du muon dans le cadre relativiste

Les physiciens des particules travaillent le plus souvent avec l'énergie d'une particule plutôt qu'avec la vitesse d'une particule. D'après la théorie de la relativité restreinte, il existe une relation liant l'énergie E à la masse m pour une particule au repos (ou dans son référentiel propre, ce qui revient au même). On a dans ce cas, $E = mc^2$, une équivalence masse-énergie (d'ailleurs les scientifiques n'utilisent jamais le kg pour parler de la masse d'une particule mais d'eV et ses multiples keV, MeV, GeV voire TeV).

Dans le cas d'un référentiel où la particule étudiée a une vitesse v , l'énergie de la particule est $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ avec p la quantité de mouvement relativiste de la particule donnée par la relation $p = \gamma m v$. On démontre que cette équation peut-être écrite de la façon suivante : $E = \gamma mc^2$ soit $\gamma = E/mc^2$.

Ainsi, si on considère des muons à 20 GeV, nous pouvons déterminer γ . L'énergie d'un muon au repos est de 106 MeV :

$$\gamma = 20\text{GeV}/106\text{MeV}$$

$$\gamma = (20 \cdot 10^9)/(106 \cdot 10^6)$$

$$\gamma = 189$$

Le temps de vie moyen mesuré dans le référentiel lié au sol devient alors $189 \times 2.2 \times 10^{-6} \text{s}$. On peut alors calculer maintenant le taux de muons atteignant le sol :

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\frac{5 \cdot 10^{-5}}{189 \cdot 2,2 \cdot 10^{-6}}}$$

$$\frac{N}{N_0} = 0,89$$

On en déduit qu'une partie significative des muons créés dans la haute atmosphère atteindront le niveau du sol. Cette prédiction est en accord avec les mesures expérimentales⁹.

Bibliographie

M. Boratav & R. Kerner, *Relativité*, Ellipses, 1991

J. H. Smith, *Introduction à la relativité*, InterEditions, Paris, 1979

Arnold Wolfendale, *Cosmic Rays*, Newnes, 1963

⁹ Voir l'expérience effectuée sur le Mont Wilson en 1962.

c. Zoologie des particules

i. Bref historique

Les savants ont toujours essayé d'appréhender la complexité de la nature en recherchant ses constituants élémentaires leur permettant, par association de plus en plus complexe de ces constituants, d'expliquer l'ensemble des objets existants dans l'univers. ARISTOTE, dès le IV^e siècle avant notre ère, avait réduit l'ensemble de ce qui constitue l'univers en cinq éléments : quatre éléments étaient à la base de ce qui constituait le monde sub-lunaire (la terre, l'eau, l'air et le feu) et un cinquième élément (l'éther) qui constituait le monde supra-lunaire.

Au XIX^e siècle, la théorie que défendait ARISTOTE était obsolète et l'on se dirigeait vers la notion d'atome comme constituant élémentaire de l'Univers. Un scientifique russe, D. MENDELEIEV (1834-1907) classa les éléments connus à l'époque dans un tableau selon des critères physico-chimiques, il en classa environ une soixantaine. L'idée d'atome ne faisait pas encore l'unanimité dans la communauté scientifique à cette époque. Cette idée s'imposera petit à petit tout au long du XIX^e siècle – et sera définitivement mise en évidence en 1905 par A. EINSTEIN avec la description qu'il donna du mouvement brownien. Ces atomes, classés par MENDELEIEV, étaient environ 80 au début du XX^e siècle. Mais sont-ils réellement élémentaires ?

Dès 1897, J. J. THOMSON (1856-1940) découvrit l'électron qui est une particule de charge électrique négative et proposa dès 1904 un premier modèle de l'atome : le modèle du plumpudding où l'électron est un composant de l'atome.

Dès 1911, E. RUTHERFORD (1871-1937), voulant valider le modèle théorique proposé par THOMSON, déduisit des résultats expérimentaux de son équipe – notamment GEIGER et MARDSEN – la faiblesse du modèle du plumpudding et en proposa un nouveau : l'atome est constitué d'un noyau chargé positivement et, autour de ce noyau, tournent des électrons tournant autour comme des planètes autour du Soleil.

Le proton, constituant de charge électrique positive du noyau, fut mis en évidence par le même RUTHERFORD en 1919, puis le neutron, deuxième constituant du noyau mais n'ayant pas de charge électrique, en 1932 par J. CHADWICK (1891-1974). Pour résumer, en 1932, les particules élémentaires étaient le proton et le neutron constituant le noyau et des électrons tournant autour, l'ensemble constituant l'atome.

À partir des années 30 commença une course aux hautes énergies – qui n'est d'ailleurs pas finie aujourd'hui avec le LHC – pour découvrir des particules de plus en plus énergétiques. Les progrès techniques au niveau des appareils de détection pour l'étude des rayons cosmiques puis des produits des collisions dans les accélérateurs de particules ainsi que les avancées théoriques avec l'avènement de la mécanique quantique entraînèrent des découvertes toujours plus nombreuses de particules et l'élaboration de théories toujours plus audacieuses ; voici les principales dates ayant marqué la physique des particules des années 30 à nos jours :

1932 : mise en évidence du positon, prévu par DIRAC (1902-1984) en 1928, par ANDERSON (1905-1991)

1933-1934 : théorie de la désintégration β de FERMI (1901-1954)

1936 : découverte du muon par ANDERSON

1946-1950 : théorie quantique de l'électromagnétisme (QED) (FEYNMAN (1918-1988), SCHWINGER (1918-1994) et TOMONAGA (1906-1979))

1956: LEE (né en 1926) et YANG (né en 1922) suggèrent que la force faible peut engendrer une violation de la parité

1960-1970: Découverte de centaines de particules « élémentaires » : ρ , ω , K^* , Σ , Ξ ...

1962 : Découverte des deux neutrinos ν_μ et ν_e

1964 : Existence des quarks* u , d et s (postulée par GELL-MANN (né en 1929) et ZWEIG (né en 1937))

1964 : Deux nouveaux quarks, c et s , sont suggérés pour expliquer la multitude de particules détectées

1967 : GLASHOW (né en 1932), SALAM (1926-1996) et WEINBERG (né en 1933) proposèrent un schéma d'unification des forces électromagnétiques et faibles. Prédiction de l'existence du boson de HIGGS et des bosons lourds Z^0 et W^\pm , des dizaines de fois plus massifs que les particules élémentaires connues à ce jour

1973 : Énoncé de la théorie des interactions fortes entre particules colorées (QCD). Prédiction de l'existence des gluons*

1978 : Découverte d'un cinquième quark, le bottom b , au Fermilab

1983 : Découverte du Z^0 et du W^\pm au CERN

1995 : Découverte d'un sixième quark, le top t , au Fermilab

1998 : Preuve de l'existence de neutrinos de masse non nulle au Super-Kamiokande

Différentes théories vont se succéder et se compléter pour classer et expliquer l'ensemble de ces particules découvertes. À partir des années 60, avec les collisionneurs de particules de plus en plus performants, le nombre de nouvelles particules découvertes va exploser pour arriver à un nombre de constituants élémentaires d'environ 200 dès la fin des années 60 ! Cela fait beaucoup plus que le nombre d'atomes et ne satisfaisait pas les physiciens théoriciens : c'était beaucoup trop complexe. Pour remédier à cela et tenter de rendre le nombre de particules élémentaires plus réduit, de nouvelles théories vont voir le jour qui tiennent compte à la fois du côté relativiste des phénomènes et du caractère quantique du comportement des particules : ce sont des théories de jauge*. L'ensemble de ces théories, basées sur une même approche mathématique – la théorie quantique des champs –, constitue le Modèle Standard* qui sera peu à peu complété pour être aujourd'hui considéré comme le modèle le plus précis, le plus testé et admis par la très grande majorité de la communauté scientifique. D'ailleurs les dernières particules découvertes dans les années 80 et 90 – bosons intermédiaires W^\pm et Z^0 en 1983 et les quarks – avaient été prévues par le Modèle Standard et constituèrent un triomphe pour celui-ci. Aujourd'hui, le LHC tente de mettre en évidence la dernière particule annoncée par le Modèle Standard, le boson de HIGGS.

ii. Le Modèle Standard

Les particules élémentaires du Modèle Standard

Les particules élémentaires constituant le Modèle Standard sont divisées en deux groupes : les bosons et les fermions. Les fermions – séparés en deux familles : les leptons* et les quarks – sont à proprement parler les particules de matière et les bosons sont les vecteurs¹⁰ des interactions fondamentales. En effet, dans le Modèle Standard, une interaction entre deux fermions se fait par l'intermédiaire d'un boson vecteur.

Le terme de « particule élémentaire » ne veut pas dire stable. En effet, à part le proton et l'électron, toutes les autres particules se désintègrent avec des temps de vie plus ou moins importants. Une particule est dite « élémentaire » lorsque celle-ci peut-être traitée comme un point mathématique qui n'a pas de structure interne.

FERMIONS				
	LEPTONS		QUARKS	
1 ^{ère} famille	électron (e^-)	neutrino électron (ν_e)	down (d)	up (u)
2 ^{ème} famille	muon (μ^-)	neutrino muon (ν_μ)	strange (s)	charm (c)
3 ^{ème} famille	tau* (τ)	neutrino tau (ν_τ)	bottom (b)	top (t)

Les particules constituant la matière usuelle sont les quarks *Up* et *Down* qui forment les protons et les neutrons (le proton est constitué de deux *Up* et un *Down* et le neutron de deux *Down* et un *Up*) et l'électron. Toutes les autres particules sont : soit obtenues par détection de particules

¹⁰ On parle de boson de vecteur.

cosmiques (ou ses reliquats : le muon est un exemple), soit formées artificiellement dans un accélérateur de particules et détectées ensuite. À chacune de ces particules est associée une antiparticule* de charge opposée¹¹.

Leptons

Les leptons sont sensibles à l'interaction électromagnétique et à l'interaction faible mais pas à l'interaction forte. Les leptons portent une charge électrique $-e$ ou sont neutres.

Particule	Charge (en e)	Masse (en MeV/c^2)
électron (e^-)	-1	0,51
muon (μ^-)	-1	106
tau (τ^-)	-1	1777

Chacun des trois leptons décrit ci-dessus définit une des trois familles constituant les leptons. Pour simplifier, le muon et le tau sont des copies des électrons en plus lourds. Les physiciens n'expliquent pas pour le moment pourquoi les leptons sont divisés en trois familles.

À chacune de ces trois particules est associé un neutrino. On a longtemps pensé que les neutrinos n'avaient pas de masse, mais des preuves récentes montrent que ce n'est pas le cas. Comme les électrons, muons et taus, les trois types de neutrinos ont des masses qui augmentent lorsque l'on passe d'une famille à l'autre. Ils sont électriquement neutres et ne sont donc pas sensibles à l'interaction électromagnétique : ils ne sont sensibles qu'à l'interaction faible.

À chaque lepton, correspond un anti-lepton. Les particules correspondant à l'électron, au muon et au tau ont une charge de $+1e$ mais ils ont la même masse : on note l'anti-électron e^+ , l'anti-muon μ^+ et l'anti-tau τ^+ . En physique des particules, on note souvent les antiparticules avec une barre; ainsi, à une particule p , on associe une antiparticule \bar{p} .

Quarks

Les quarks sont des particules chargées électriquement et donc sont sensibles à l'interaction électromagnétique, ils sont aussi sensibles à l'interaction faible et à l'interaction forte.

Les quarks n'existent pas à l'état libre mais sous forme d'assemblage de quarks qui sont appelés hadrons*¹². Les hadrons sont de deux types :

- les mésons*, composés d'un quark et d'un anti-quark : Π^+ ($u\bar{d}$), Π^- ($d\bar{u}$), Π^0 ($u\bar{u}$).
- les baryons*, composés de trois quarks : le proton (uud) et le neutron (ddu)

Tout comme les leptons, les quarks forment trois familles. Un membre de la famille porte la charge électrique $+2/3$ et l'autre la charge $-1/3$. Les familles sont donc (u,d), (s,c) et (t,b) et avec chacune de ces familles, la masse augmente.

¹¹ Ainsi que tous ses autres nombres quantiques.

¹² Seul le quark top existe à l'état libre car il se désintègre avant de pouvoir former un hadron. Il est donc le seul quark dont on peut étudier les propriétés précisément.

	Quark	Charge électrique (e)	Masse (MeV/c ²)
1 ^{ère} génération	Up (u)	+2/3	2,55
	Down (d)	-1/3	5,04
2 ^{nde} génération	Charm (c)	+2/3	1,27.10 ³
	Strange (s)	-1/3	105
3 ^{ème} génération	Top (t)	+2/3	173,1.10 ³
	Bottom (b)	-1/3	4,20.10 ³

iii. Les interactions fondamentales

On considère aujourd'hui, dans le Modèle Standard, trois interactions : l'interaction électromagnétique, l'interaction faible et l'interaction forte.

Type	Intensité de la force	Particule de champ (boson vecteur)	Domaine d'application
Interaction nucléaire forte	~ 1	8 Gluons (sans masse)	Noyau atomique
Interaction électromagnétique	~ 10 ⁻³	Photons (sans masse)	Électromagnétisme Atome
Interaction nucléaire faible	~ 10 ⁻⁵	Bosons Z ⁰ , W ⁺ , W ⁻ (particules lourdes)	Radioactivité β Désintégration

Ces interactions, à l'exception de la gravitation, sont décrites par des théories quantiques des champs qui leur sont propres. Le Modèle Standard est en fait l'ensemble de ces théories des champs. Chaque interaction se fait par l'échange d'une particule appelée boson de jauge¹³. Pour chaque interaction, il existe un champ : le boson de jauge est le quantum de ce champ¹⁴.

La gravitation résiste pour le moment à tous les essais de quantification et n'est donc pas incluse dans le Modèle Standard. Certaines expériences recherchent la particule de champ correspondante (le graviton).

¹³ Les bosons sont de spin entier. Les bosons de jauge pour l'interaction électromagnétique, l'interaction faible et l'interaction forte ont un spin 1.

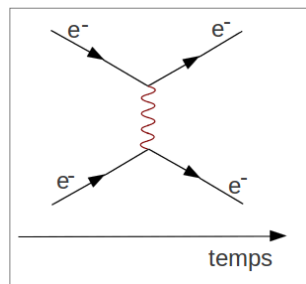
¹⁴ Le nombre de bosons de jauge existant pour chaque champ est donné par le nombre de générateur du groupe unitaire permettant de décrire l'interaction étudiée. Le groupe est déterminé en fonction des symétries qu'a l'interaction.

L'interaction électromagnétique – Electrodynamique quantique*

La théorie décrivant l'interaction électromagnétique est appelée électrodynamique quantique. C'est une théorie quantique dans le sens où il y a une quantification du champ électromagnétique : les particules chargées interagissent par échange de quanta du champ, le photon. C'est aussi une théorie relativiste car elle prend en compte le temps de propagation des interactions c'est-à-dire du boson vecteur qui est ici le photon.

Le photon¹⁵ est une particule qui n'a pas de masse et est noté γ . Cette théorie mise au point par R. FEYNMAN (1918-1988), S.I. TOMONAGA (1906-1979) et J. SCHWINGER (1918-1994) (Prix Nobel en 1965 pour les trois) dans les années 40 va servir de modèle pour les autres théories de champ rendant compte des autres interactions).

On peut représenter une interaction de manière simple et commode avec un diagramme de FEYNMAN¹⁶. Ci-dessous, on représente l'interaction entre deux électrons qui s'échangent un photon virtuel (on parle de photon virtuel car il ne peut pas être détecté).



Exemple de diagramme de Feynman pour l'interaction entre deux électrons échangeant un photon virtuel.

L'interaction forte – Chromodynamique quantique*

L'interaction forte est une interaction à courte distance entre les quarks par l'intermédiaire des gluons¹⁷ qui sont les bosons vecteurs de cette interaction. L'interaction forte permet d'expliquer comment les neutrons et les protons forment le noyau de l'atome. Cette théorie datant de 1964 est l'oeuvre de M. GELL-MANN (né en 1929).

Pour expliquer l'interaction forte, il a été nécessaire d'utiliser un nouveau type de charge, la charge de couleur* – c'est la raison pour laquelle cette théorie est appelée chromodynamique quantique –. Chaque quark a une charge de couleur : rouge (R), vert (V) ou bleu (B) et les anti-quarks ont une des couleurs complémentaires : complémentaire du rouge (\bar{R}), complémentaire du vert (\bar{V}) ou complémentaire du bleu (\bar{B}).

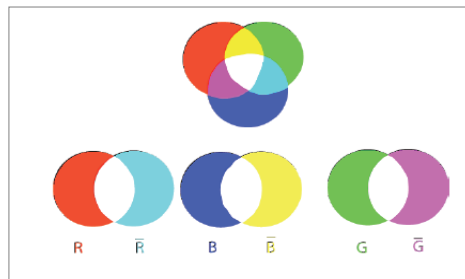


Diagramme de composition des couleurs. Crédit : CERN.

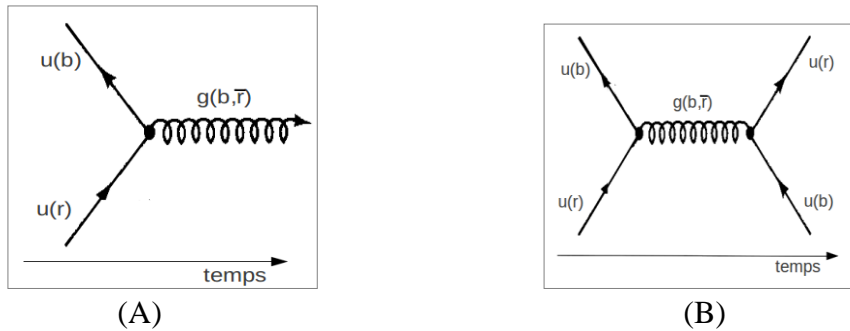
¹⁵ Le groupe de symétrie du champ électromagnétique est le groupe de symétrie unitaire, U(1). Ce groupe de symétrie compte un seul générateur et donc explique pourquoi il y a un seul boson de jauge: le photon.

¹⁶ Ils permettent également le calcul rapide de grandeurs physiques comme la section efficace*.

¹⁷ Le groupe de symétrie décrivant l'interaction forte est le groupe SU(3) qui a 8 générateurs donc il existe 8 bosons différents pour décrire cette interaction.

Une particule stable doit être blanche, c'est-à-dire composée soit des trois couleurs R, V, B (cas des nucléons), soit d'une couleur et de sa complémentaire (cas des mésons) : ainsi pour un proton, on peut avoir $u(R)u(V)d(B)$, $u(B)u(R)d(V)$ ou $u(V)u(B)d(R)$ et pour un méson π^+ , on peut avoir $u(R)\bar{d}(\bar{R})$, $u(V)\bar{d}(\bar{V})$ ou $u(B)\bar{d}(\bar{B})$. Les gluons qui sont les bosons vecteurs de la charge de couleur de masse nulle sont au nombre de 8, ils sont donc les quanta du champ de couleur et sont eux-mêmes porteurs de la charge de couleur donc ils peuvent interagir entre eux ce qui n'est pas le cas des autres bosons de jauge.

On peut représenter cette interaction par un diagramme de FEYNMAN:



Exemple de diagramme de Feynman pour l'interaction forte : processus élémentaire (A) et interaction entre deux quarks up (B)

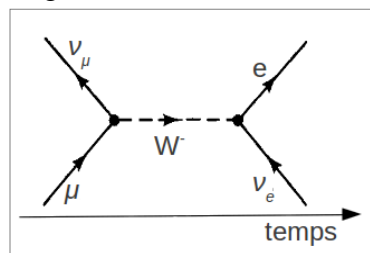
Tout comme il y a conservation de la charge électrique dans l'interaction électrofaible, il y a ici conservation de la charge de couleur. On constate sur le diagramme de FEYNMAN que l'on peut lire : le quark q de couleur bleu B échange un gluon de couleur $B\bar{R}$ avec un quark de couleur rouge R . Ainsi au bilan, on a :

$$B \text{ (quark bleu)} = B \text{ (gluon)} + \bar{R} \text{ (gluon)} + R \text{ (quark rouge)} = B \text{ (quark rouge qui devient bleu)}.$$

L'interaction faible

L'interaction faible est aussi une interaction à très courte portée ($\sim 10^{-15}$ m) et est responsable des désintégrations nucléaires. La théorie expliquant ces phénomènes a été mise au point en 1961 par S. GLASHOW (né en 1932) et trouvera sa justification expérimentale par la découverte des bosons vecteurs de cette interaction, les bosons intermédiaires¹⁸ W^\pm et Z^0 en 1983. Ce sont trois bosons qui ont la caractéristique d'être très lourds (environ 80,3 GeV pour les W et 91,2 GeV pour le Z^0 soit environ la masse d'un atome d'argent) alors que les autres bosons vecteurs sont de masse nulle (photons et gluons). De plus, ils ont une charge électrique pour les W^\pm (charge positive de +1 pour W^+ et charge négative de -1 pour W^- par contre Z^0 est neutre électriquement). Le boson de HIGGS a été introduit pour expliquer le caractère massif de ces bosons ainsi que celui des quarks et de leptons.

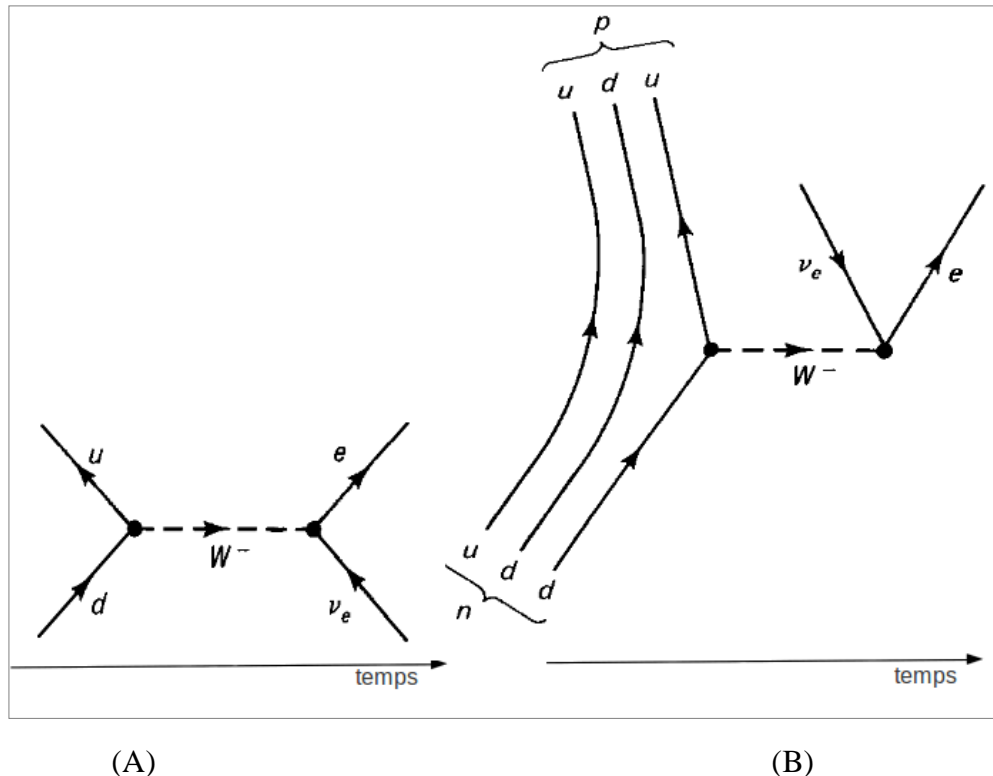
On peut représenter sur un diagramme de FEYNMAN l'interaction faible pour les leptons.



Exemple de diagramme de Feynman pour l'interaction faible avec échange de boson W^- .

¹⁸ Le groupe de symétrie de l'interaction faible est $SU(2)$ et a trois générateurs ce qui explique le fait qu'il y ait trois bosons de jauge.

Les quarks sont eux aussi sensibles à l'interaction faible.



Exemple de diagramme de Feynman pour l'interaction faible impliquant les quarks : processus entre deux quarks (A), diagramme expliquant la radioactivité β (B).

L'interaction faible et électromagnétique ont été unifiées en une seule théorie appelée interaction électrofaible.

Portée d'une interaction

C'est la masse du boson de jauge qui permet de définir l'ordre de grandeur de la portée d'une interaction. On peut aisément estimer cet ordre de grandeur en utilisant le principe d'incertitude de HEISENBERG :

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar$$

La quantité d'énergie nécessaire pour pouvoir échanger un boson de jauge est donnée par la relation d'EINSTEIN :

$$\Delta E = mc^2$$

En utilisant maintenant le principe d'incertitude nous pouvons déterminer le temps pendant lequel ce boson peut exister :

$$\Delta t \sim \frac{\hbar}{\Delta E} = \frac{\hbar}{mc^2}$$

La relativité restreinte prédit que rien ne peut se déplacer à une vitesse supérieure à celle de la lumière, c . On peut ainsi utiliser la vitesse de la lumière comme limite maximale de déplacement de notre boson de jauge et ainsi estimer la distance qu'elle peut parcourir pendant le temps Δt de son existence :

$$\begin{aligned} \text{Vitesse} &= \frac{\text{distance}}{\text{temps}} \\ \Rightarrow \Delta x &= c \Delta t = \frac{c \hbar}{mc^2} = \frac{\hbar}{mc} \end{aligned}$$

Cela nous donne la portée de l'interaction. On peut voir que si $m \rightarrow 0$ alors $\Delta x \rightarrow \infty$ on en déduit que l'interaction électromagnétique est de portée infinie. Par contre, du fait de la masse importante des bosons de jauge de l'interaction faible, la portée va être très faible: pour les bosons W de masse

80 GeV/c², on a bien une portée de l'ordre de 10⁻¹⁵ m. Ce qui explique alors pourquoi l'interaction faible ne se manifeste qu'à l'échelle du noyau¹⁹.

Bibliographie

M. Crozon, *L'univers des particules*, Points Sciences, Seuil, 1999
R. Zitoun, *Introduction à la physique des particules*, 2eme édition, Dunod, 2004;
W. S. C. Williams, *Nuclear and Particle Physics*, Clarendon Press, Oxford, 1991

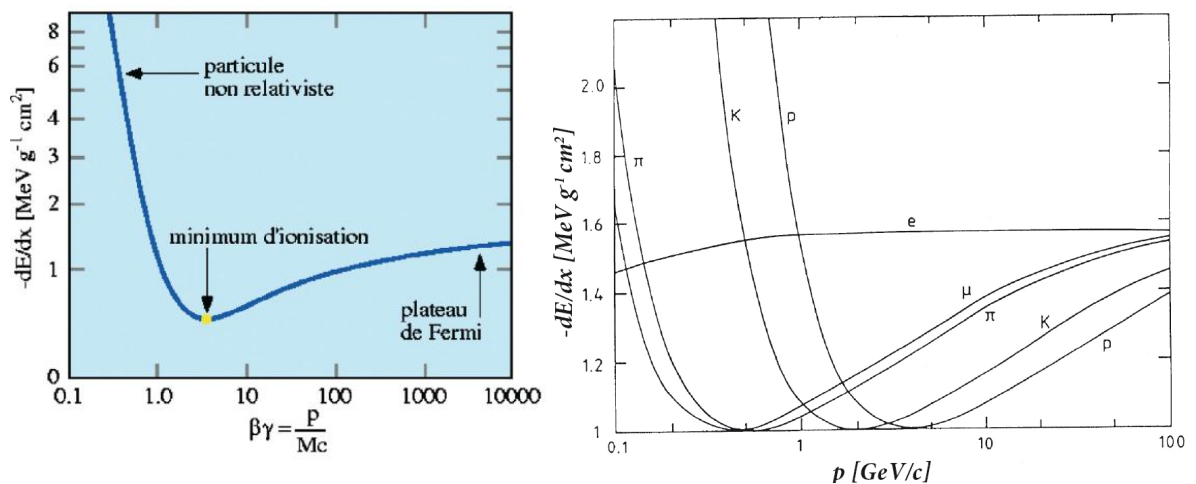
¹⁹ Cet argument n'est pas valable pour les gluons de l'interaction forte. Malgré leur masse de zéro, la portée de l'interaction forte est très faible à cause du concept de confinement due à la propriété de la charge de couleur.

d. Physique des détecteurs

i. Interaction avec la matière

Chaque particule élémentaire interagit de manière propre avec la matière.

- **Neutrinos** : ceux-ci interagissent très faiblement avec la matière. La probabilité d'interaction par interaction faible est d'environ 1 sur 10 milliards. Leur détection se fait donc soit avec de grand volume de détecteur²⁰, soit en mesurant l'énergie manquante lors d'une collision par conservation de l'impulsion.
- **Muons** (et ou particules chargées) : ceux-ci interagissent avec la matière essentiellement de manière électromagnétique suivant trois processus :
 - *la diffusion multiple au voisinage des différents noyaux composant la matière.* Cette succession de diffusions conduit à un changement global de direction du muon ayant pour effet de dégrader la précision des mesures de l'impulsion, basée sur la déviation de la direction de la particule par un champ magnétique.
 - *la perte d'énergie par ionisation.* La perte d'énergie par unité de distance est donnée par la formule dite de Bethe Bloch dont l'allure est donnée sur la figure ci-dessous. La première partie décroissante est liée au fait que plus la particule est rapide moins le processus de ionisation a le temps de se produire ; la deuxième partie croissante est liée à des effets relativistes augmentant la probabilité d'interaction. La figure ci-dessous montre que chaque particule a un comportement différent dans un matériau donné ce qui peut permettre leur identification.
 - *rayonnement de freinage à haute énergie.* Celui-ci est lié au passage d'une particule chargée près du champ coulombien d'un atome : l'accélération de celle-ci est alors modifiée, entraînant un rayonnement électromagnétique (production d'un photon) et la perte d'énergie. Il ne concerne que les muons les plus énergétiques ($E > 100$ GeV)

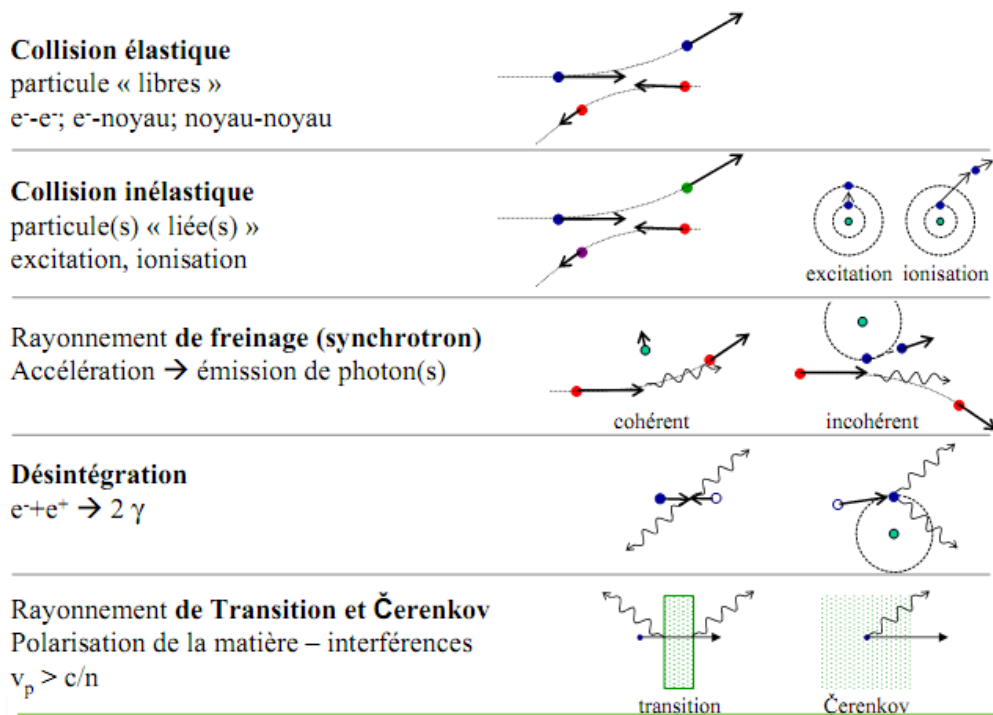


Allure de la perte d'énergie d'une particule chargée traversant la matière. A gauche en fonction de la vitesse de la particule, à droite en fonction de son impulsion. Crédit : revue élémentaire, LAL, IN2P3.

- **Electrons** : l'électron peut être considéré comme un muon léger : ces interactions avec la matière sont identiques à celles du muon. Cependant, en raison de sa masse beaucoup plus faible, celui-ci perd essentiellement son énergie en raison du rayonnement de freinage. La diffusion multiple a pour conséquence de dévier fortement la direction de l'électron.

²⁰ Le détecteur japonais SuperKamiokandé est composé de 50 000 tonnes d'eau, permettant la détection journalière d'une trentaine de neutrinos.

Les positrons ont le même type d'interaction avec la matière que les électrons. A cela s'ajoute cependant le phénomène d'annihilation²¹ avec les électrons atomiques : cette annihilation conduit à la production de un ou deux photons.

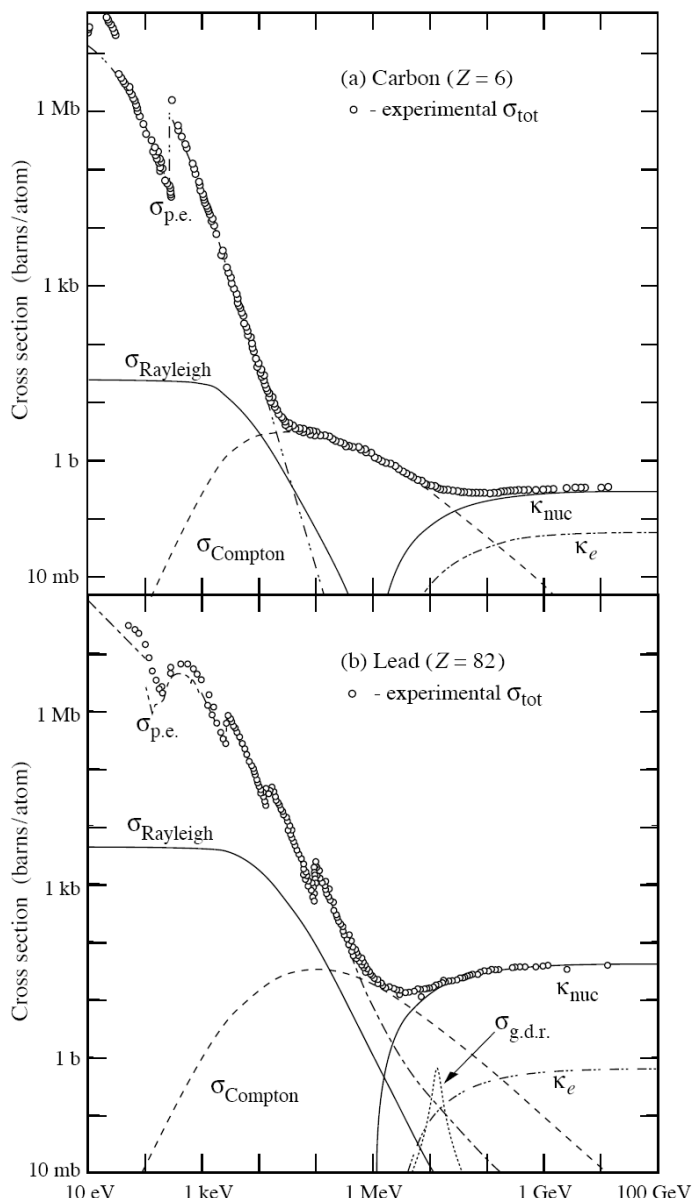


Interactions entre particules chargées. Crédit : N. Pichoff, CEA.

- **Photons** : il y a essentiellement trois mécanismes d'interaction des photons avec la matière dont les proportions varient avec l'énergie du photon (voir la figure ci-dessous).
 - *effet photoélectrique* : dominant à faible énergie ($E \ll 1$ MeV). Le photon est absorbé par l'atome et son énergie est transférée à un électron de celui-ci qui est alors dans un état excité. Si l'énergie est suffisante, l'électron peut être éjecté. La section efficace montre un pic caractéristique des couches électroniques de l'atome.
 - *diffusion Compton*²² : dominant à partir de 1 MeV. Le photon interagit avec un électron lié : après collision, le photon est diffusé avec un certain angle. La diffusion est inélastique : une partie de l'énergie du photon incident est absorbée.
 - *création de paires* : dominant au-delà de quelques MeV. Lorsque l'énergie du photon devient supérieure à $2m_e c^2$, la production d'une paire électron-positron devient possible. Cette production se fait par interaction avec le champ électrique produit soit par le nuage électronique, soit par le noyau.

²¹ $e^+e^- \rightarrow \gamma$.

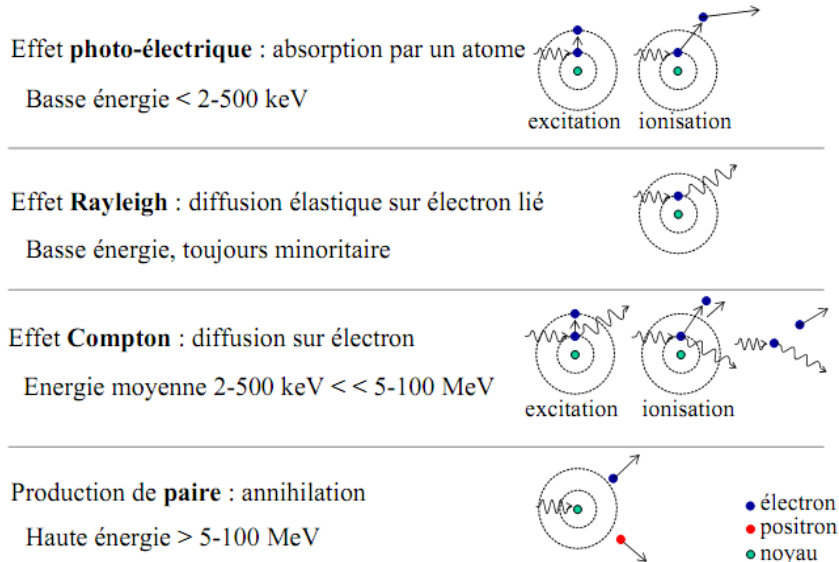
²² A faible énergie, on appelle la diffusion Compton, diffusion Thomson.



Section efficaces* d'interaction des photons en fonction de l'énergie dans le cas du carbone en haut et du plomb en bas.

- $\sigma_{p.e.}$: effet photoélectrique
- κ_{nucl} : production de paires, par interaction avec le champ électrique nucléaire
- κ_e : production de paires, par interaction avec le champ électrique électronique
- $\sigma_{g.d.r.}$: interaction photon-noyau : lors de ce type d'interaction le noyau est détruit.

Crédit : K. Nakamura et. al.



Interactions photon-matière. Crédit : N. Pichoff, CEA.

- **Hadrons** : les hadrons créés lors des interactions se désintègrent généralement très rapidement en hadrons stables : pions et nucléons. Les interactions de ces derniers avec la matière sont identiques à celles pour les muons. L'énergie linéique perdue par ionisation est d'autant plus importante que la particule est lourde (voir figure de la partie des muons). La longueur d'interaction beaucoup plus faible des hadrons permet de les distinguer des muons. Les hadrons peuvent également interagir par interaction forte.
- **Effet Cerenkov** : cet effet se produit lors du passage d'une particule dans un milieu diélectrique à une vitesse plus élevée que la vitesse de la lumière. De manière analogue au bang supersonique créé lors du dépassement de la vitesse du son par un avion, la particule crée ici un flash lumineux. Cette émission de lumière est due à la polarisation du milieu diélectrique induite par le passage de la particule chargée. Lors de la relaxation du milieu, celui-ci émet alors une onde électromagnétique. A faible vitesse, les ondes électromagnétiques sont émises à différents points de la trajectoire et interfèrent destructivement. Si la vitesse des particules dépasse la vitesse de la lumière, les ondes interfèrent constructivement suivant un front d'ondes qui fait un angle θ caractéristique par rapport à la trajectoire. Cet effet est responsable de la lumière bleue observée dans les piscines de refroidissement des réacteurs nucléaires. Cet effet est aussi à la base de la détection du passage de particules chargées dans les expériences HESS et AUGER.

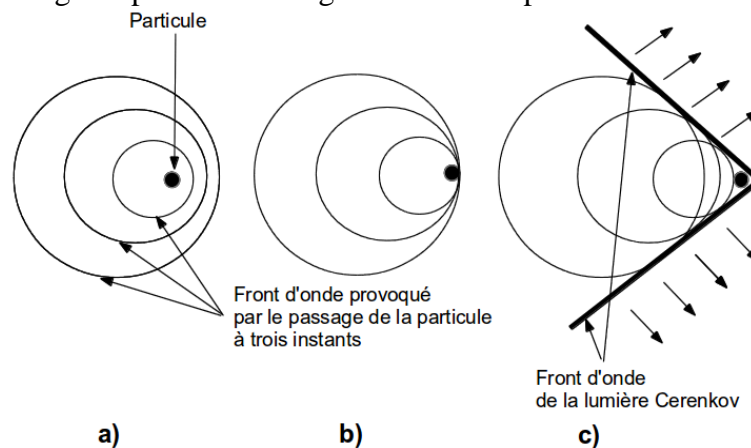
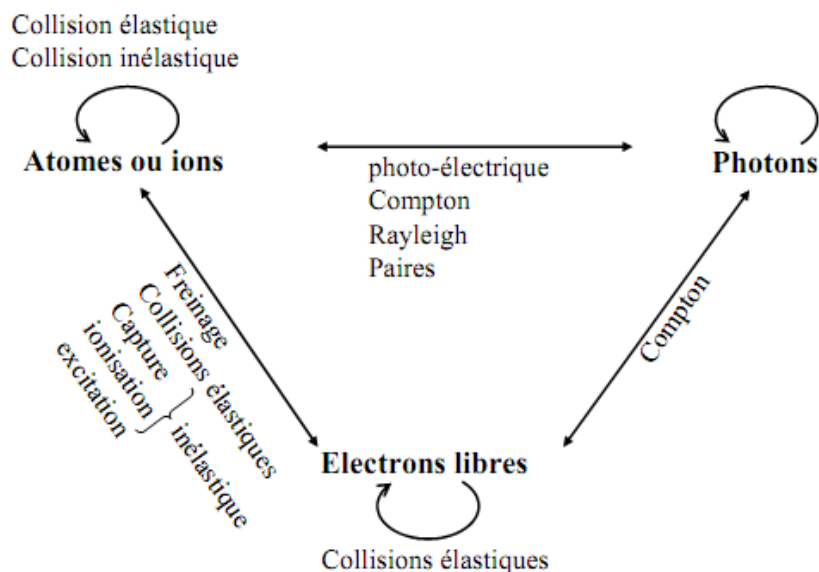


Illustration de l'effet Cerenkov :

- La vitesse de la particule est inférieure à la vitesse de la lumière dans le milieu
- La vitesse de la particule est égale à la vitesse de la lumière dans le milieu
- La vitesse de la particule est supérieure à la vitesse de la lumière dans le milieu

Crédit : Sciences à l'Ecole



Résumé des interactions photon/particule chargée-matière. Crédit : N. Pichoff,

ii. Application aux détecteurs

Un détecteur de particules est un appareil qui permet de détecter le passage d'une particule et, généralement, d'en déduire différentes caractéristiques (en fonction du type de détecteur) telles que sa masse, son énergie, son impulsion, ou encore sa charge électrique.

- **Détecteurs à ionisation** : lors du passage dans le milieu actif (solide, liquide ou gazeux) du détecteur, la particule ionise ce milieu. Le détecteur est muni de deux électrodes : les électrons créés lors de l'ionisation migrent alors vers la cathode et les cations vers l'anode. On peut alors mesurer la variation de tension créée au niveau des électrodes ou encore le courant créé par le déplacement des ions et/ou des électrons créés dans le milieu actif. En fonction de la différence de potentiel V entre les deux électrodes, plusieurs régimes d'utilisation sont possibles :
 - *région de recombinaison* : V est faible. Les électrons et les ions créés par ionisation sont peu accélérés et se recombinent par agitation thermique. Seule une petite fraction des charges d'ionisation est détectée. Le taux de recombinaison diminue quand on augmente V .
 - *région d'ionisation* : au dessus d'une certaine valeur de V (quelques centaines de volts), la recombinaison devient négligeable et pratiquement l'ensemble des charges d'ionisation dérivent vers les électrodes et sont donc détectés. Le courant d'ionisation atteint sa valeur de saturation : si on augmente V sur une certaine plage, le courant mesuré reste constant. Le signal est proportionnel à l'ionisation déposée et **permet une mesure de l'énergie des particules**. L'inconvénient de ce régime est la faible intensité des signaux qui requiert une électronique à bas bruit.
 - *région proportionnelle* : pour un champ électrique suffisamment fort, les électrons sont suffisamment énergétiques pour créer des ionisations secondaires et permettent une amplification du signal. Cette région est appelée proportionnelle car l'amplitude mesurée est proportionnelle au nombre de paires d'ions produites par la particule. Ce type de régime est utilisé essentiellement **pour mesurer les positions des particules**. La mesure d'énergie est rendue impossible par les fluctuations possibles lors du processus d'amplification (celui-ci dépendant également de nombreux paramètres : température, tension). L'avantage des chambres proportionnelles est de ne pas exiger d'électronique à bas bruit.
 - *région Geiger* : pour un champ électrique encore plus élevé, le nombre d'électrons et d'ions créés par avalanche devient indépendant du nombre d'ions primaires. Quelle que soit la particule incidente, un fort signal est créé dans le milieu lié à une ionisation quasi-totale de l'enceinte. Cela permet de **compter le nombre de particules traversant le détecteur et est utilisé dans les détecteurs Geiger-Müller**. L'inconvénient est que ce type de détecteur ne peut détecter un flux élevé de particules en raison du temps mort existant entre le passage de deux particules lié au temps de dérive des ions.
- **Détecteur à semi-conducteurs** : ils fonctionnent sur le même principe que les chambres à ionisation : les porteurs de charges positifs et négatifs sont libérés lors du passage d'une particule. Ces porteurs traversent un champ électrique entre les électrodes et créent une impulsion de tension. La hauteur de celle-ci est proportionnelle au nombre de porteurs de charge libérés et ainsi à l'énergie.
- **Détecteurs à scintillations** : ils sont composés d'un scintillateur (substance radio-luminescente : qui produit des photons le long du passage d'une particule chargée) et d'un photomultiplicateur permettant de créer des impulsions électriques à partir de faibles éclairs de lumière du scintillateur. Dans la plupart des cas, les scintillateurs utilisés sont tels que l'intensité mesurée par le photomultiplicateur est proportionnelle à l'énergie de la particule : il peut donc servir de **spectromètre** et non pas uniquement de **compteurs**. Il existe deux types de scintillateur :
 - *inorganiques* : la production de photons est liée à la structure en bandes d'énergies des matériaux cristallins.

- *organiques* : même dans un état cristallin, le phénomène de création de photon est lié au spectre des molécules organiques constituant le scintillateur. Ceux-ci ont un temps de réponse plus court que les scintillateurs inorganiques.

Les scintillateurs liquides sont des solutions organiques dont le solvant n'absorbe pas le rayonnement. Les scintillateurs plastiques sont également des solutions dont le solvant est une substance solide polymérisée. Ce type de détecteur est utilisé pour le cosmodétecteur pour sa rapidité (il ne permet pas cependant d'accéder à l'énergie des muons)

- **Détecteur Cerenkov** : ils utilisent le rayonnement Cerenkov produit par les particules rapides et se composent principalement d'un milieu traversé par les particules (ex : eau) dans lequel est produite la lumière, d'un système optique qui intercepte la lumière et de photomultiplicateurs qui transforme le signal lumineux en signal électrique. Par rapport aux détecteurs à scintillations les détecteurs Cerenkov peuvent être composés de n'importe quel matériel transparent ce qui les rend bon marché. Ils sont utilisés comme **compteurs de particules**, comme compteurs de particules ayant une vitesse supérieure à un seuil ou comme compteurs de particules dont la vitesse est comprise dans un intervalle donné.

Bibliographie :

- *Atlas de la physique atomique et nucléaire, Encyclopédies d'aujourd'hui*
- *Introduction à la physique des particules, R. Zitoun, édition Dunod*
- *Précis de physique nucléaire, D. Blanc, édition Dunod*
- www.ondes-et-matiere.fr/Joomla/pdf/presentation_pichoff.pdf

2. Présentation du cosmodétecteur

a. Description générale



Cosmodétecteur en fonctionnement relié à l'ordinateur. Crédit : Sciences à l'Ecole.

Le cosmodétecteur est composé de 4 parties :

- Les raquettes de scintillateur : détecte le passage éventuel des muons μ^\pm
- le photomultiplicateur (PM) : amplifie le signal détecté par le scintillateur;
- la partie électronique : transforme le signal analogique reçu à la sortie du PM en signal numérique et discrimine les signaux trop faibles (fixé par l'expérimentateur)
- le logiciel

b. Les scintillateurs

Les scintillateurs sont, en règle générale, constitués par un milieu solide transparent (organique tels les plastiques ou inorganique tels ceux aux cristaux de NaI(Tl)) susceptible d'émettre des rayonnements de fluorescence²³ et de phosphorescence²⁴ après excitation par une particule chargée (dans notre cas, un muon μ^\pm mais un scintillateur peut tout à fait détecter un électron ou n'importe quelle autre particule chargée). Selon les matériaux utilisés pour le scintillateur, on aura soit de la fluorescence, soit de la phosphorescence.

Le scintillateur du cosmodétecteur est de type plastique (fait de matière organique) et c'est le phénomène de fluorescence qui est très largement prépondérant : les molécules excitées se dés excitent très rapidement par émission d'un photon lumineux. Le mécanisme de fluorescence est associé aux états excités des molécules. La scintillation est basée sur les électrons π des liaisons carbone-carbone des molécules. La lumière émise couvre généralement un spectre large dans l'U.V.

²³ On parle de fluorescence lorsque l'émission de lumière est immédiate (dans un temps de l'ordre de 1 ns à 1 μ s) et indépendante de la température.

²⁴ La phosphorescence correspond à une émission de lumière sur une plus longue période (entre 1 μ s et 1 mn) et qui dépend de la température.

et le visible. Ces photons de fluorescence issus de la désexcitation du milieu solide du scintillateur sont ensuite détectés par un photomultiplicateur.



Photo du scintillateur utilisé pour la mesure du temps de vie du muon (protégé par un plastique). Crédit : Sciences à l'Ecole.

Les paramètres utiles d'un scintillateur sont les suivants:

- efficacité de scintillation: c'est la quantité d'énergie nécessaire pour créer un photon de scintillation. Par exemple, NaI(Tl) : 25 eV, anthracène : 60 eV, plastique : 100 eV;
- spectre d'émission de lumière: il faut s'assurer que la longueur d'onde d'émission est adaptée à la fenêtre d'entrée du récepteur de la chaîne de mesure (dans notre cas la photocathode du photomultiplicateur (PM)) ;
- temps de décroissance de la scintillation ;
- pouvoir d'absorption des rayonnements.

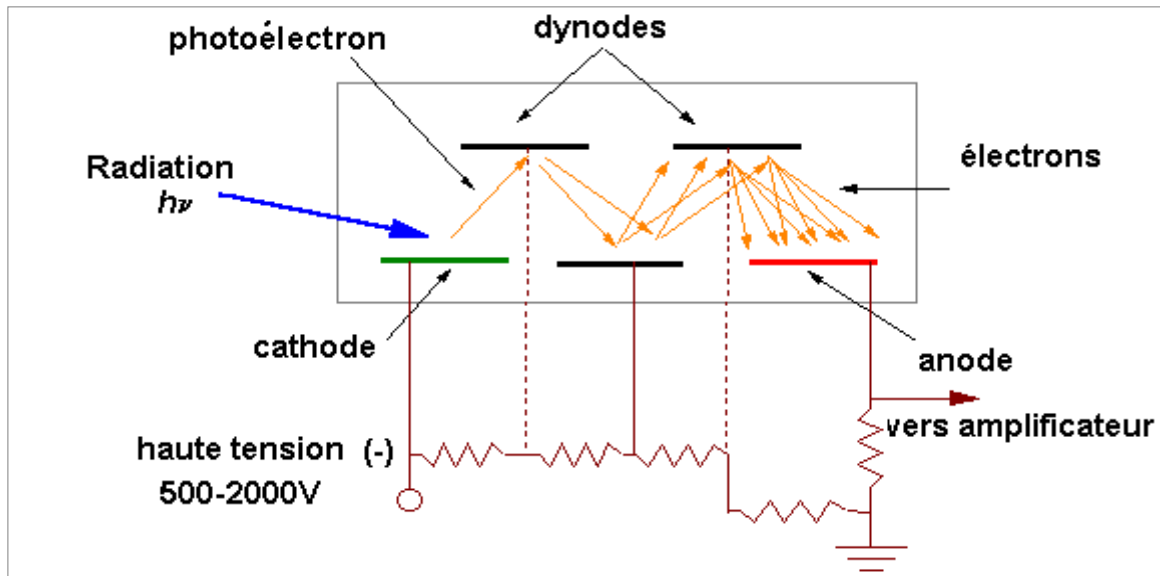
Les scintillateurs plastiques, faits de matériaux organiques, ont un avantage par rapport à des scintillateurs à cristaux – malgré leur efficacité limitée –, ils ont un temps caractéristique très petit (de l'ordre de la nano seconde $\sim 10^{-9}$ s) de sorte que l'on peut compter les événements venant de flux intense de particules chargées. Le scintillateur plastique, grâce à son temps de réponse rapide, est donc tout à fait adapté à des mesures de coïncidences* ou de temps de vie.

c. Les photomultiplicateurs

Les photons issus du scintillateur arrivent sur une photocathode* et donnent naissance à des photoélectrons ce qui permet de transformer le signal lumineux en signal électrique. Cependant, l'intensité électrique issue de la photocathode est très petite (de l'ordre de 10^{-14} A) et n'est donc pas détectable en l'état : il faut amplifier ce signal.



Photomultiplicateurs utilisés dans le cosmodétecteur. Crédit : Sciences à l'Ecole



Principe de fonctionnement d'un photomultiplicateur.
 Source : Patrick Kohl <http://patrick.kohl.pagesperso-orange.fr>

Dans un tube vidé d'air sont donc enfermées une douzaine d'électrodes régulièrement disposées et que l'on porte à des potentiels régulièrement croissants (≈ 100 V entre deux électrodes consécutives). La première est donc une photocathode, à la tension la plus basse, qui sous l'action du faisceau lumineux issu de la scintillation émet des photoélectrons. Ceux-ci sont alors attirés par la deuxième électrode et vont la frapper avec une énergie cinétique importante: une partie de cette énergie est communiquée à certains électrons libres du métal de l'électrode, et leur fournit ainsi l'énergie de sortie Ws nécessaire pour s'arracher du métal. Chacun des photoélectrons incidents provoque ainsi la sortie de 3 ou 4 autres électrons; c'est ce qu'on appelle le phénomène d'émission secondaire. Les électrons extraits de la deuxième électrode sont alors attirés par la troisième où ils provoquent à leur tour le phénomène d'émission secondaire. Le nombre d'électrons se trouve ainsi multiplié de proche en proche; et le courant I recueilli par la dernière électrode est considérablement amplifié par rapport au faible courant de la photocathode.

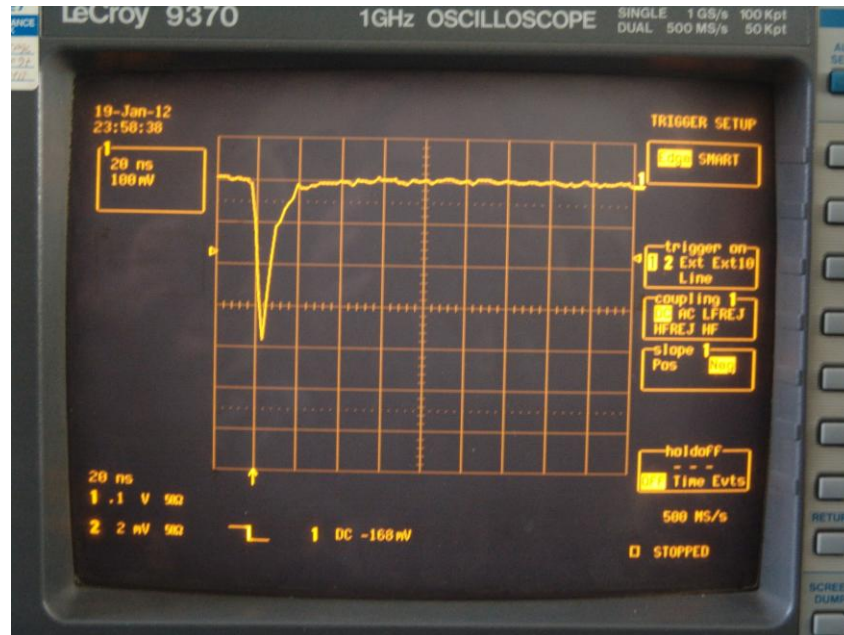
Ainsi, pour 12 électrodes, il y a 10 émissions secondaires qui vont avoir lieu, donc si chaque électron à chaque émission secondaire provoque la sortie de 4 électrons, le gain de ce dispositif est de $4^{10} \approx 10^6$, c'est-à-dire qu'un seul photoélectron provoque l'arrivée d'un million d'électrons sur la dernière électrode. Ce gain est assez important pour permettre la détection individuelle des photoélectrons. Un million d'électrons donne une charge électrique:

$$Q = -10^{-6}e = -1,6 \cdot 10^{-13}C$$

d. Electronique du détecteur

La chaîne de détection est constituée :

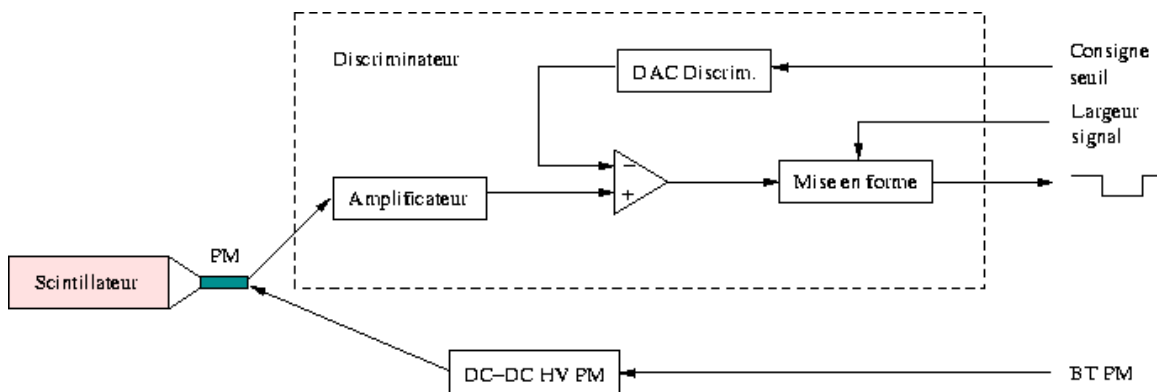
- d'un scintillateur qui réagit au passage d'une particule en émettant un signal lumineux,
- d'un photomultiplicateur, qui transforme ce signal lumineux en impulsion électrique (voir la figure ci-dessous),
- d'un module « discriminateur » qui sélectionne et transforme ces impulsions en signaux calibrés standardisés,
- d'un module de coïncidence qui sélectionne les signaux calibrés arrivant en même temps de plusieurs sources.



Allure du signal de sortie des photomultiplicateurs. Crédit : P. Wild

i. Le discriminateur

Le discriminateur a pour fonction de s'affranchir des signaux en dessous d'un certain seuil et transforme le signal analogique du photomultiplicateur en signal carré d'amplitude constante et de durée réglable quelque soit le signal à partir du moment où celui-ci passe le seuil de discrimination. Le rectangle de gauche représente les commandes de ce discriminateur. On peut commander le seuil de discrimination et la durée du signal de sortie.

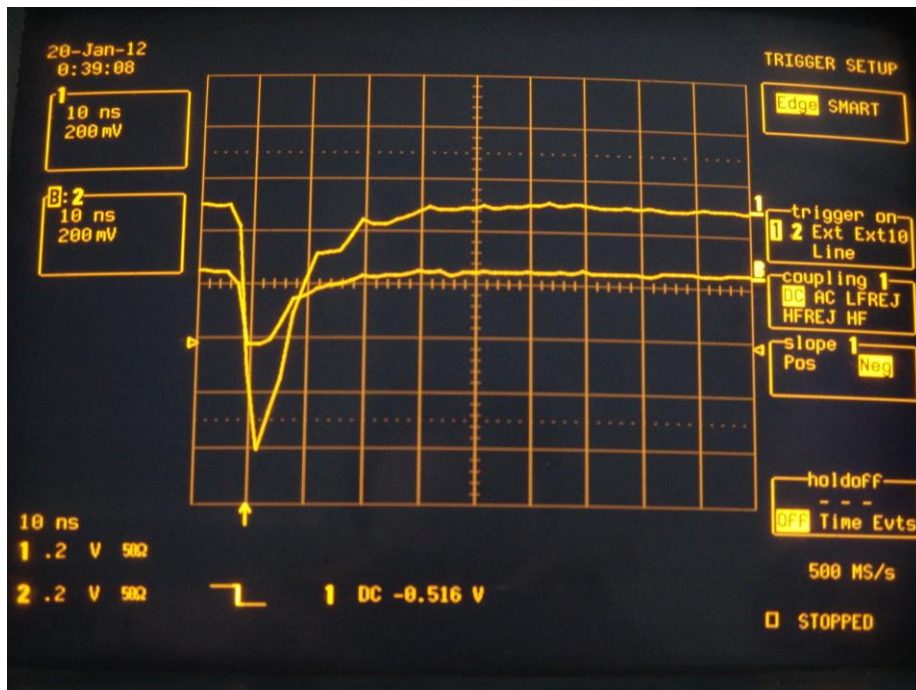


L'alimentation haute tension du photomultiplicateur est assurée par l'intermédiaire d'une alimentation basse tension et d'un convertisseur DC-DC.

ii. Principe de la coïncidence

Chaque PM du cosmodétecteur a un bruit de fond thermique aléatoire important, qui se traduit par l'émission de pulses électriques à sa sortie même en l'absence de signal lumineux (bruit d'obscurité). Ce bruit de fond a des amplitudes aléatoires et peut simuler le signal produit par le passage d'une particule dans le scintillateur. La fréquence de ce bruit de fond est en général beaucoup plus élevée que celle du signal et l'occulte complètement. Il est donc impossible de détecter le passage d'une particule à l'aide d'un seul détecteur élémentaire. On résout cette difficulté en associant deux ou plusieurs scintillateurs disposés de façon à ce que la particule les traverse tous. Le muon, se déplaçant à une vitesse proche de celle de la lumière, créé un signal dans chacun des

scintillateurs dans un intervalle de temps de l'ordre de quelques nanosecondes (voir figure ci-dessous). Au contraire les bruits de fond émis par les photomultiplicateurs sont complètement décorrélés. En utilisant une fenêtre de détection de 100ns, nous sommes certains de prendre en compte les signaux générés par le muon tout en ayant une probabilité faible que les signaux de bruits de fond (coïncidence fortuite) se produisent dans cette fenêtre.



Signal en coïncidence de deux PMs. Crédit : P. Wild

Le taux de coïncidence fortuite N se calcule facilement :

- Soit n_1 : nombre de coups par seconde pour le détecteur 1
- Soit n_2 : nombre de coups par seconde pour le détecteur 2
- Soit T : durée de la fenêtre de coïncidence (sec)

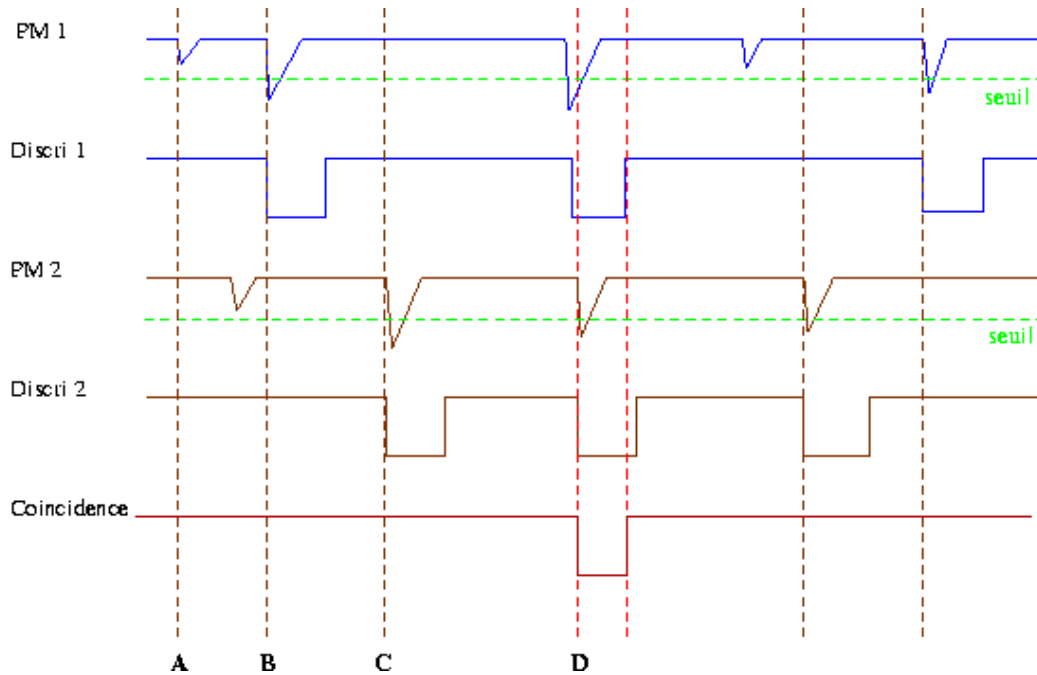
Alors :

$$N(\text{coups/sec}) = n_1 \cdot n_2 \cdot T$$

Si on prend un ordre de grandeur de 100 coups/sec pour les deux PMs et une durée de fenêtrage de 100 ns, on obtient un taux de coïncidence fortuite de 10^{-3} coup/s, totalement négligeable par rapport un taux de comptage de muon de 1 coups/s. En revanche, avec un taux de comptage de un coup toutes les 5 min (0,0033 coups/s), on aurait alors une coïncidence fortuite sur 4 déclenchements parasites sur les 5 minutes... plus du tout négligeable !

On ne peut donc détecter le passage d'un muon que si l'on dispose d'au moins deux détecteurs élémentaires et d'une logique de coïncidence temporelle des signaux de ces détecteurs élémentaires.

Exemple des différentes configurations possibles



Cas A : bruit dans le PM1 en dessous du seuil de détection : le discriminateur ne répond pas.

Cas B : signal au-dessus du seuil dans le PM1, rien dans le PM2 : pas de coïncidence.

Cas C : signal au-dessus du seuil dans le PM2, rien dans le PM1 : pas de coïncidence.

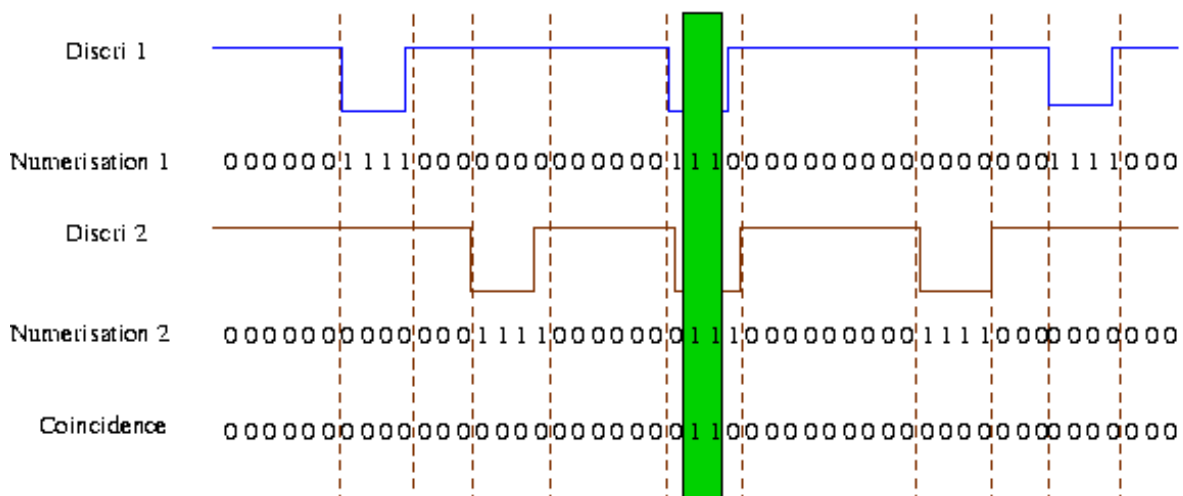
Cas D : signaux au-dessus du seuil dans les 2 PM et compatibles en temps, c'est un muon.

Remarque : dans les cas B et C, on ne peut pas savoir si le signal ayant déclenché le PM est un bruit de fond du PM ou un vrai muon dont la trajectoire ne rencontrait pas l'autre scintillateur.

Electronique intégrée de la roue cosmique :

Dans le cas de l'électronique intégrée livrée avec la roue cosmique, dans un souci de compacité et de compatibilité avec les techniques utilisés actuellement en physique des particules, on a choisi de numériser les signaux dès la sortie des discriminateurs et d'effectuer ensuite la coïncidence sur les données enregistrées. Le schéma de fonctionnement est toujours le même, mais la coïncidence électronique est remplacée par un ET logique dans le processeur d'acquisition de données.

Dans le schéma suivant, on retrouve les impulsions à la sortie des discriminateurs, la numérisation des 2 voies et le ET logique entre les 2 sorties qui donne la coïncidence.



Bibliographie

L. Valentin, *Le monde subatomique*, Hermann, 1995

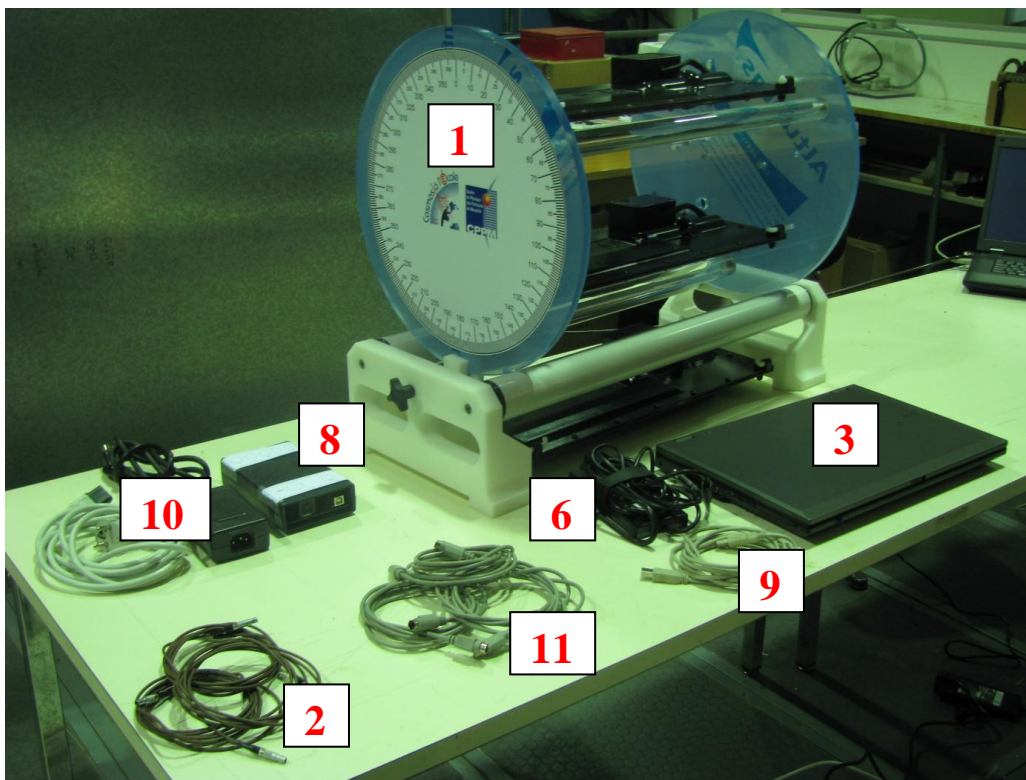
3. Les fiches pédagogiques

a. Prise en main et réglages

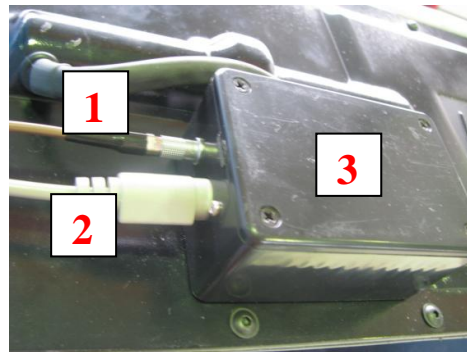
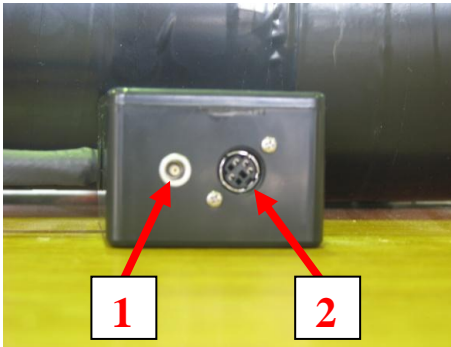
i. Prise en main

LISTE DU MATERIEL :

1. Une roue cosmique constituée par une structure mécanique et 3 détecteurs (raquettes de scintillateur couplées chacune à un photomultiplicateur). Les raquettes sont toutes démontables en otant les taquets blancs les retenants. Attention à bien les remettre pour éviter toute chute des raquettes : les PM étant fragiles, ceux-ci se brisent facilement, m
2. 3 câbles lemo permettant la transmission des données entre la roue et l'ordinateur
3. Un ordinateur DELL Latitude E5510 muni du logiciel de contrôle de la roue et de prise des données
4. Un bloc de scintillateur couplé à un photomultiplicateur pour la mesure de la durée de vie du muon
5. Un guide de lumière couplé à un photomultiplicateur pour l'étude de l'effet Cerenkov
6. Une batterie d'ordinateur
7. Une boîte de transport
8. Un boîtier électronique
9. Un câble USB
10. Un boîtier d'alimentation du boîtier électronique
11. 3 câbles pour l'alimentation des raquettes et des détecteurs Cerenkov et « vie moyenne »



BRANCHEMENTS :



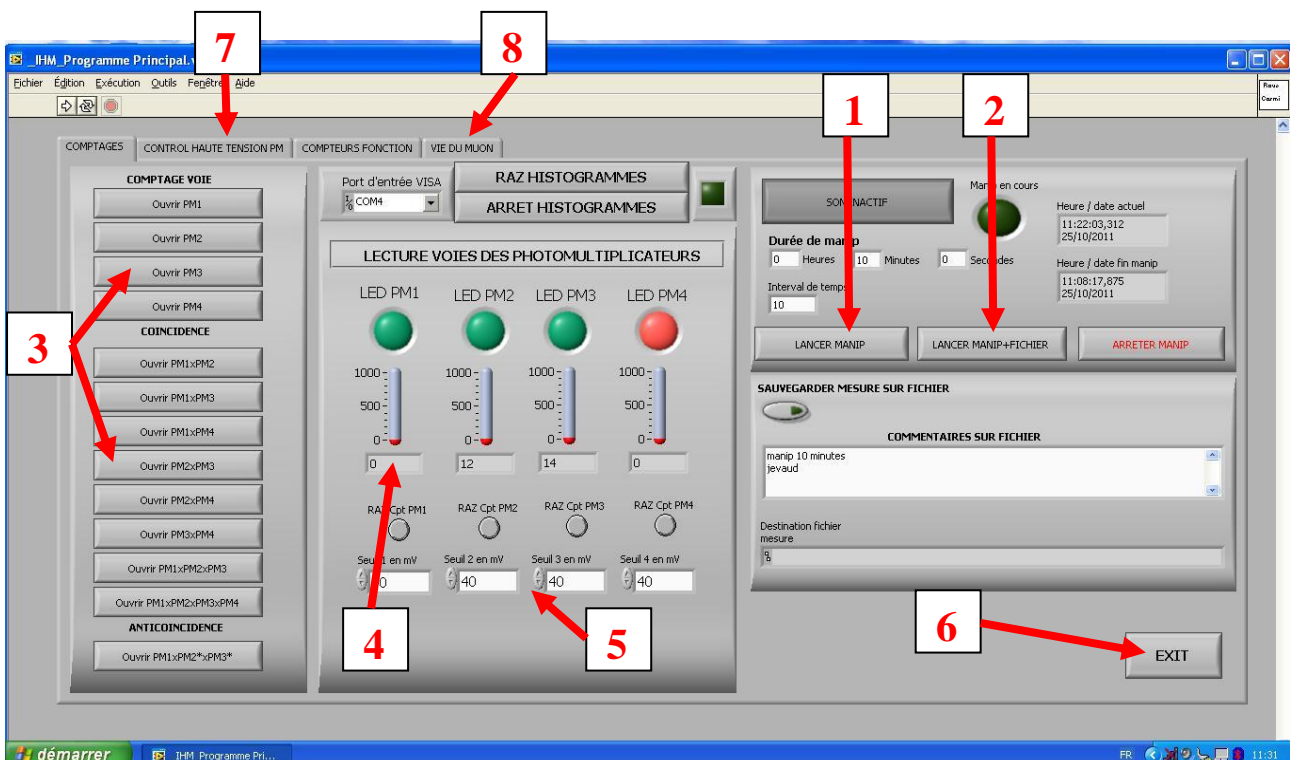
L'alimentation au niveau des PM sont de deux types :

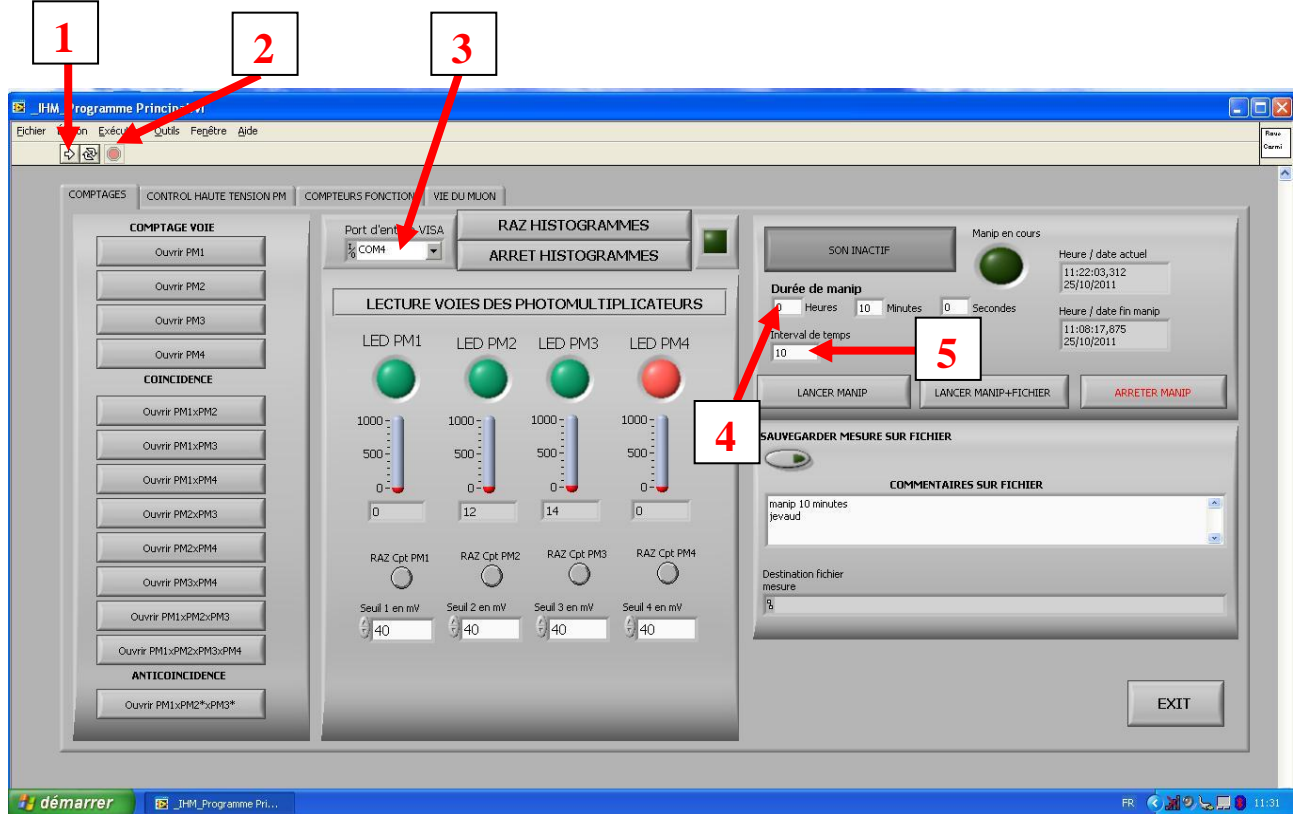
1. Câbles lémo assurant la transmission des données (à gauche sur la figure de gauche ci-dessus).
Les câbles lémo sont extrêmement fragiles : évitez de les tordre ou de les pincer.
2. Alimentation électrique du boîtier de conversion haute tension (3).
Les prises sont fragiles : évitez de forcer lors du branchement ; regardez au préalable le sens de branchement.

LOGICIEL :

Celui-ci permet de :

- Au niveau du premier onglet :
 1. Lancer la prise de données
 2. Enregistrer les données
 3. Ouvrir les fenêtres de comptages pour toutes les voies individuellement et en coïncidence
 4. Observer les taux de comptage de chaque PM
 5. Régler les seuils de détection
 6. Sortir du logiciel
- Au niveau du deuxième onglet :
 7. Régler la haute tension à une valeur consigne et obtenir la valeur effectivement lue
- Au niveau du quatrième onglet :
 8. Lancer l'expérience de durée de vie du muon



MISE EN ROUTE :

1. **Bouton démarrage** : aucun paramètre (haute tension, seuil...) ne sera enregistré si le logiciel n'a pas été lancé
2. **Bouton stop** : à utiliser en fin d'expérience
3. **Canal de sortie des données** : doit être laissé sur com4.
4. **Durée de l'expérience**
5. **Intervalle de temps** : temps au bout duquel le nombre de muons détectés est relevé.
Attention : pour des raisons informatiques, l'intervalle de temps ne doit pas être pris égal à la durée de l'expérience car le taux de comptage donné sera alors erroné.

OUVERTURE DES FICHIERS DE DONNEES AVEC UN TABLEUR :

Cliquer droit sur le fichier texte et cliquer sur ouvrir avec puis sélectionner votre tableur. Une fenêtre s'ouvre, vous demandant des précisions sur les séparateurs : garder uniquement coché « tabulations ».

ii. Réglage de la tension des photomultiplicateurs

Présentation

L'alimentation haute tension du photomultiplicateur est assurée par l'intermédiaire d'une alimentation basse tension et d'un convertisseur DC-DC.

Si la tension d'alimentation est trop haute, le bruit de fond est trop important. Si elle est trop basse, certains muons ne seront pas détectés.

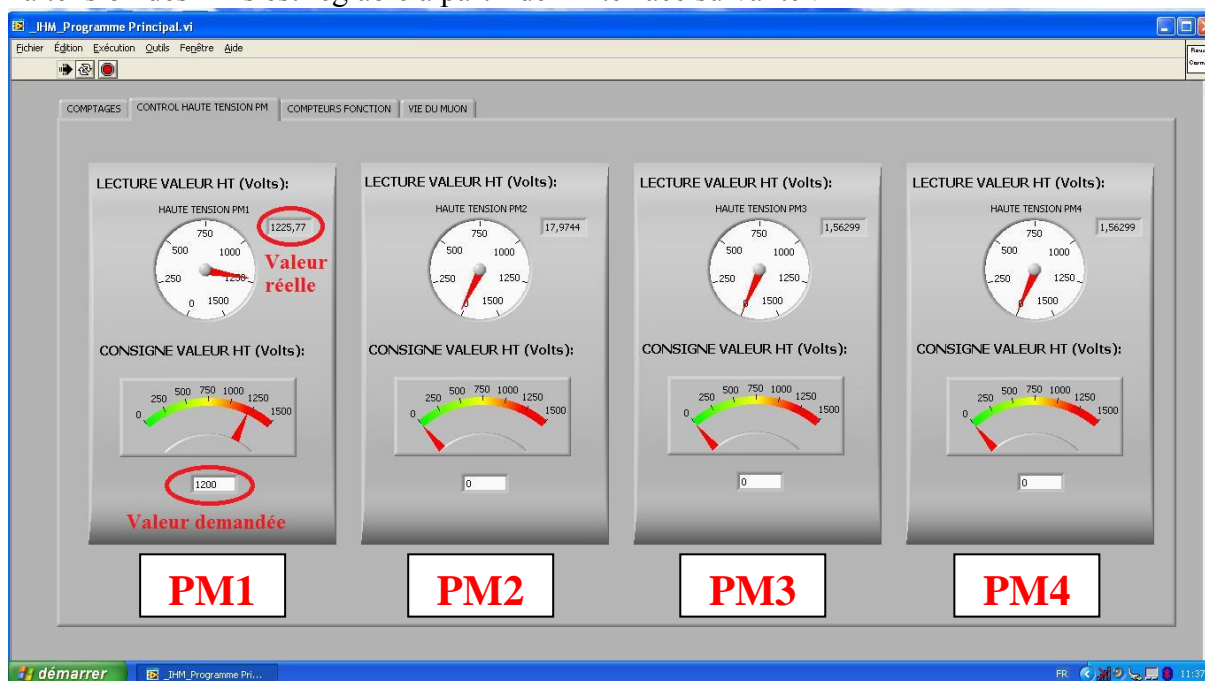
Il s'agit de déterminer la tension d'alimentation optimale du photomultiplicateur amovible (PM3).

Temps environ 2h

Protocole

On utilise le fait que les PM1 et PM2 alimentés avec une tension contenue dans la plage de fonctionnement fournie avec la roue. Le PM3 sera inséré entre ces deux PMs.

La tension des PMs est réglable à partir de l'interface suivante :



On fait varier la tension U_{PM3} du PM3 sur la plage de fonctionnement (800-1300 V).

NE PAS DEPASSER 1350 V POUR NE PAS DEGRADER LE PM.

Les temps de comptages utilisés sont de 5 min²⁵. Les seuils d'acceptance doivent être fixés à la valeur optimale obtenue lors de leur détermination (20 mV dans notre exemple).

On trace deux courbes :

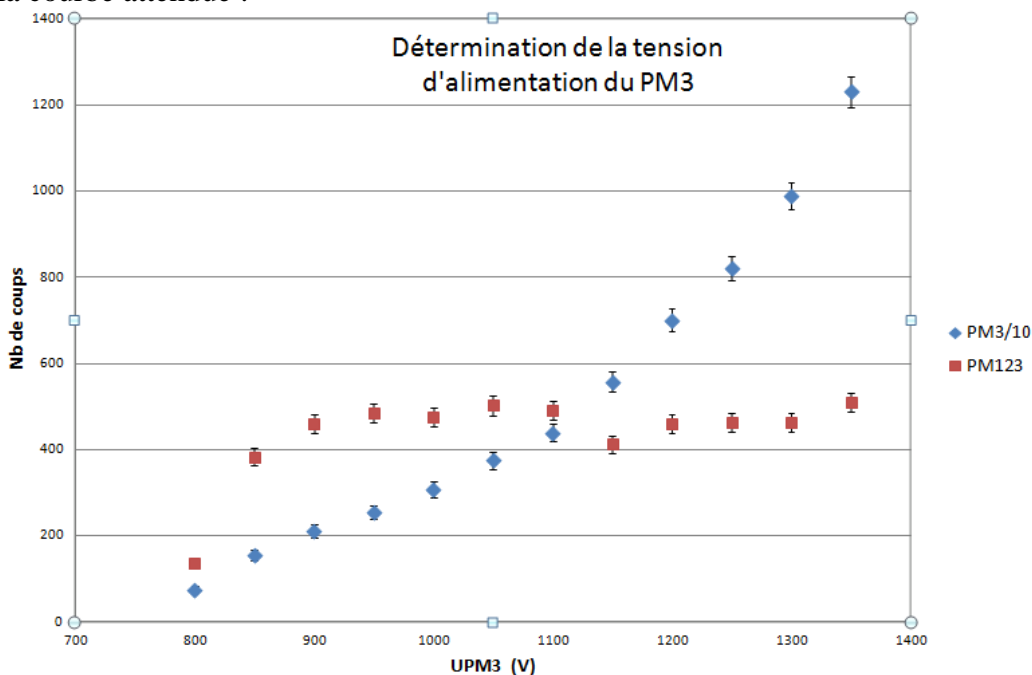
- le nombre de coups $N_{PM3}/10$ (pour une raison de lisibilité) mesurés par le PM3 en fonction de U_{PM3} .
- le nombre de coups N_{PM123} mesurés lorsque les trois PMs sont en coïncidence (voir la partie électronique du détecteur sur la coïncidence) en fonction de U_{PM3} assurant que les coups mesurés sont des muons.

²⁵ Valeur à titre indicative.

Résultats

• Détermination de la tension d'alimentation

Allure de la courbe attendue :



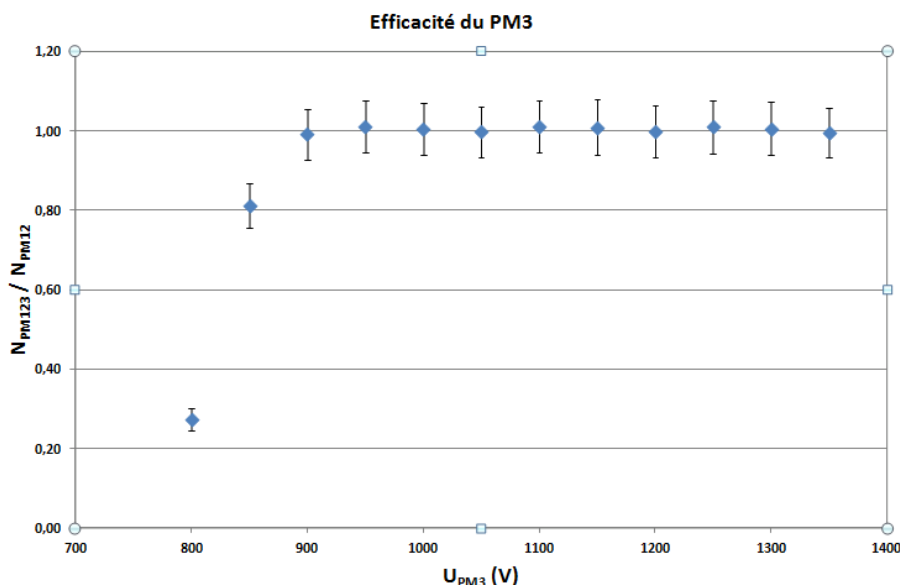
On constate que pour le PM3 seul (points bleus), le nombre de particules enregistrées augmente avec la tension U_{PM3} , ainsi que le bruit de fond électronique. Le bruit de fond étant amplifié de la même façon que le signal, aucun indice ne nous permet de trouver une valeur de U_{PM3} assurant une pleine efficacité de détection.

Pour la mesure en coïncidence (point rouges), on constate l'existence d'un palier, à partir de $U_{PM3} = 900$ V, indiquant que le compteur a atteint son maximum d'efficacité. À partir de cette valeur, l'augmentation de tension n'agit plus sur le nombre de particules détectées.

• Détermination de l'efficacité du PM3

On trace pour cela le rapport N_{PM123} sur N_{PM12} car on considère PM1 et PM2 bien calibrés.

Allure de la courbe attendue :



D'après la courbe, on observe au niveau du plateau U_{PM3} une efficacité de 100%. Il faut alors régler la tension du PM au-delà de 900V.

iii. Réglage des seuils de détection

Présentation

Le boîtier de l'électronique contient un discriminateur qui transforme les signaux analogiques venus du photomultiplicateur (voir la partie électronique du détecteur) en un signal carré. Il ignore tous les signaux dont la tension est inférieure au seuil d'acceptance.

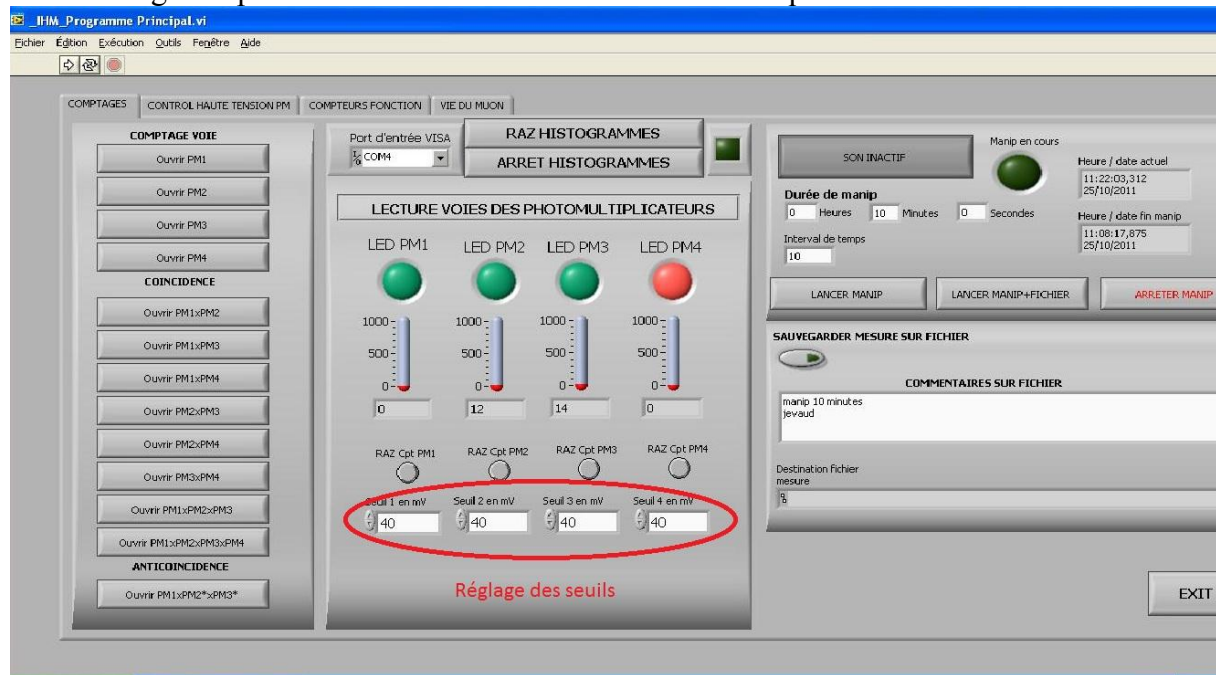
Il s'agit de déterminer la valeur optimale du seuil d'acceptance pour minimiser le bruit détecté et optimiser le comptage des muons : si le seuil est réglé trop bas, un grand nombre de signaux correspondront à du bruit de fond ; s'il est trop élevé, des muons ne seront pas détectés.

Temps environ 1h30

Protocole

La valeur optimale du seuil d'acceptance dépend de la tension d'alimentation des photomultiplicateurs. Utiliser pour cela la valeur optimale obtenue lors de la calibration de vos photomultiplicateurs (valeur mesurée ou fournie).

Le seuil est réglable par l'intermédiaire de l'interface informatique.



On mesure le taux de comptage N en coïncidence PM1 et PM2²⁶ pour une acquisition de 5 minutes^{27 28} et pour différentes valeurs du seuil d'acceptance (en mV).

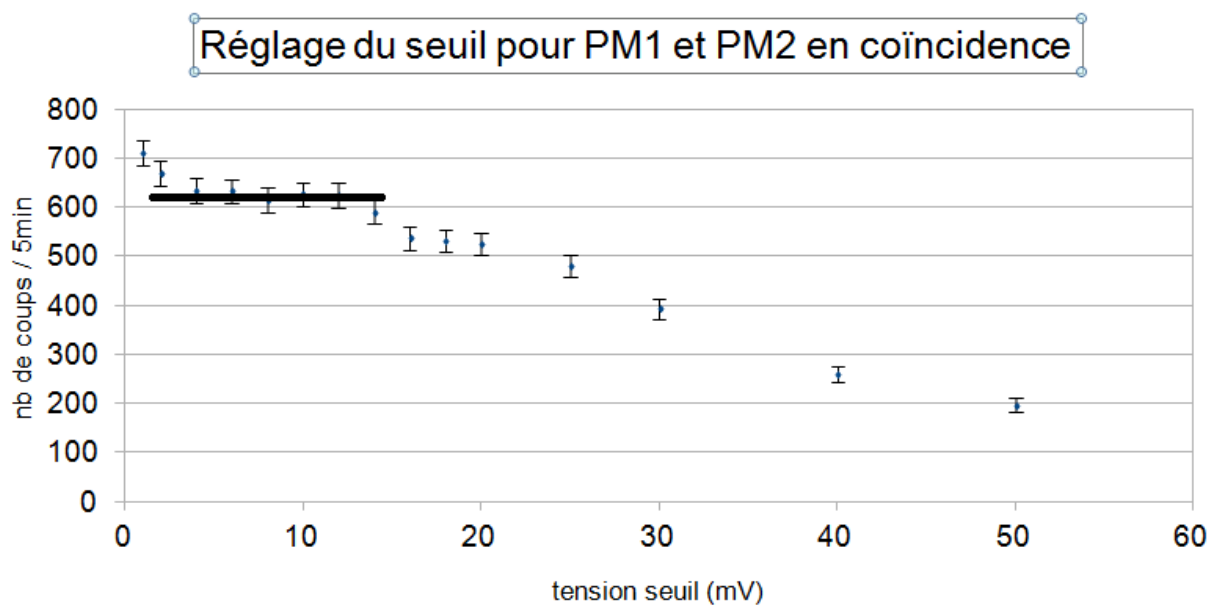
²⁶ La coïncidence permet de s'assurer que les mesures correspondent à des muons et non du bruit de fond.

²⁷ Valeur donnée à titre indicative.

²⁸ Il est conseillé d'acquérir le plus de données au niveau du plateau de la courbe (voir courbe).

Résultats

Allure de la courbe attendue



Le seuil est alors choisi au niveau du palier. On prendra garde à prendre une valeur centrale pour que la variation possible de la tension des PMs n'ait pas d'influence sur la valeur optimale du seuil d'acceptance utilisé.

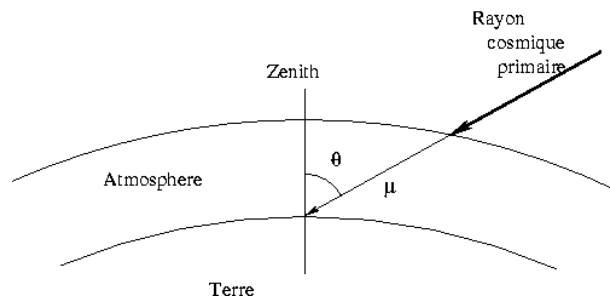
b. Mesures

i. Distribution angulaire

Présentation

Etudier la variation du taux de comptage des muons en fonction de l'inclinaison des deux détecteurs du télescope à muons. La distribution angulaire permet d'accéder via une simulation numérique au taux de muons arrivant sur Terre²⁹.

Bien que la distribution des rayons cosmiques à la surface de l'atmosphère soit complètement isotrope (les particules arrivent de tout l'espace sans direction privilégiée), le nombre de muons détectés à la surface de la Terre n'est pas le même suivant la direction regardée dans le ciel. Il varie avec l'angle zénithal (angle θ de la direction du muon avec la verticale). Il faut noter que la direction du muon est proche de celle du rayon cosmique primaire. Les muons sont créés dans les interactions hadroniques au début de la gerbe et la conservation de la quantité de mouvement va leur imposer une impulsion transverse faible. Et même si durant leur trajet, ils sont légèrement déviés par le champ magnétique terrestre, la direction initiale est globalement conservée.



Le nombre de muons détectés en fonction de l'angle zénithal dépend de différents facteurs :

- La longueur du chemin parcouru dans l'atmosphère ;
- la désintégration des muons ;
- le spectre initial d'énergie des muons.

En effet, la perte d'énergie du muon lors de la traversée de l'atmosphère est proportionnelle à la longueur du chemin parcouru et sa durée de vie, dans le référentiel de la Terre, dépend de son énergie. Au final, tous ces paramètres induisent une variation mesurée proche de $\cos^2\theta$.

Tout ceci est valable si on détecte les muons à l'air libre, loin de tout obstacle (bâtiment, flanc de montagne). Dans le cas d'une expérience en laboratoire, la traversée des bâtiments provoque une nouvelle absorption anisotrope des muons. La même mesure pourra être effectuée dans l'autre direction (angles négatifs) et/ou avec une autre orientation de l'axe de la roue pour étudier l'influence des bâtiments sur les taux de comptage.

Temps environ 2h

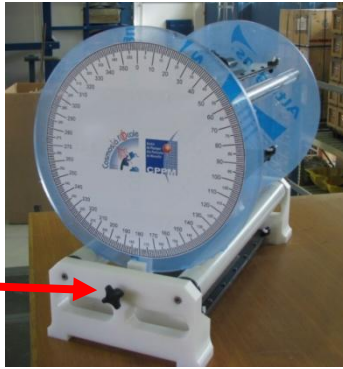
Protocole

On mesure le taux de comptage en coïncidence des PM1 et PM2 en fonction de l'angle pendant des durées de 5 minutes³⁰

²⁹ Voir exemples d'utilisation : <http://ch.lagoute.free.fr/CosmoDCL/>

³⁰ Valeur donnée à titre indicative.

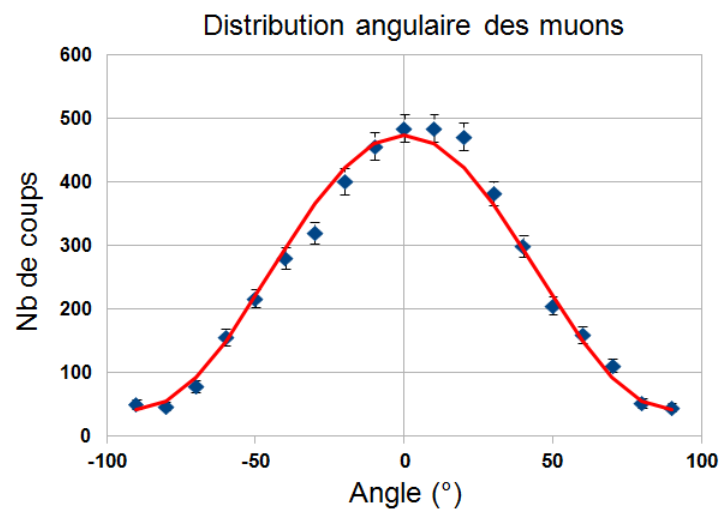
Mollette permettant de maintenir la roue à un certain angle



Rapporteurs du cosmodétecteur. Crédit : Sciences à l'Ecole

Résultats

Allure de la courbe attendue



Les données ont été ajustées par une loi de la forme $a \cdot \cos^2\theta + b$ où $a=431$ et $b=42,3$. Ces paramètres ont été obtenus par minimisation du χ^2 (voir la partie traitement des erreurs expérimentales). On pourra remarquer que pour un angle de $\pm 90^\circ$ le nombre de muons détectés n'est pas nul.

Remarque : Cette étude ne tient pas compte de la surface géométrique utile de détection présentée par les deux PMs.

iv. Le temps de vie du muon

Présentation

Le muon est une particule instable dont le principal mode de désintégration est :

$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$. Afin de mesurer son temps de vie, on utilise un scintillateur particulier au sein duquel les muons sont susceptibles de se désintégrer.

La mesure de temps de vie se fait par la détection d'un signal START et STOP :

- le signal START est créé par la détection de l'entrée du muon dans le tube de scintillateur
- le signal STOP est créé normalement par la détection de l'électron provenant de la désintégration du muon. En réalité, le signal STOP peut avoir plusieurs origines :
 - Le bruit de fond
 - Le passage d'un autre muon dans le scintillateur
 - La fin de la fenêtre de comptage car aucune désintégration n'a eu lieu lors de ce temps

Temps minimum 24h de prise de données

Protocole

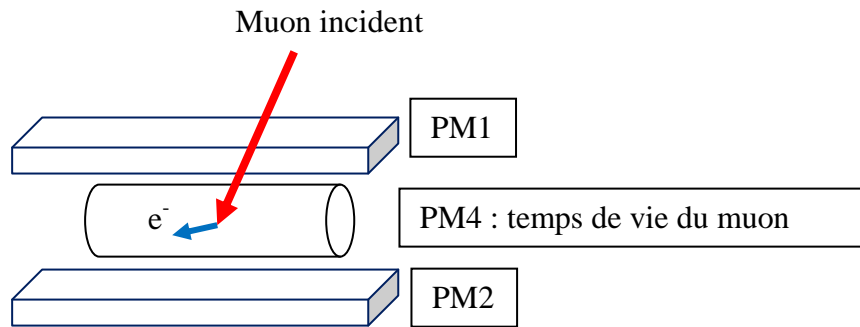
Le scintillateur dédié à la mesure de temps de vie du muon devra être branché sur la voie 4 du boîtier électronique. La tension du PM4 a été fixée à une valeur optimale préalablement étalonnée ou fournie (ici 1100V). Le seuil a été choisi à 100 mV afin de s'affranchir du bruit de fond à la fois pour le signal START et le signal STOP.

L'expérience est menée à partir de l'interface dédiée à la mesure du temps de vie :



La particularité de l'interface est de permettre deux modes de mesure :

- Vie du muon 1 : le START et le STOP sont fournis par un signal du PM4
- Vie du muon 2 (voir figure ci-dessous) : ce mode permet d'éliminer les STOP provenant du passage d'un deuxième muon. Pour cela, deux raquettes (PM1 et PM2) doivent être placées au-dessus et en-dessous du PM4. Ainsi lors du déclenchement d'un signal START, un signal STOP tel quel le PM1 et le PM2 voit un signal en coïncidence (correspondant à la traversée d'un muon) ne sera pas pris en compte.



Résultats

Le mode utilisé ici est le mode 1 pour une durée de 20h.
Le fichier de données a l'allure suivante :

```

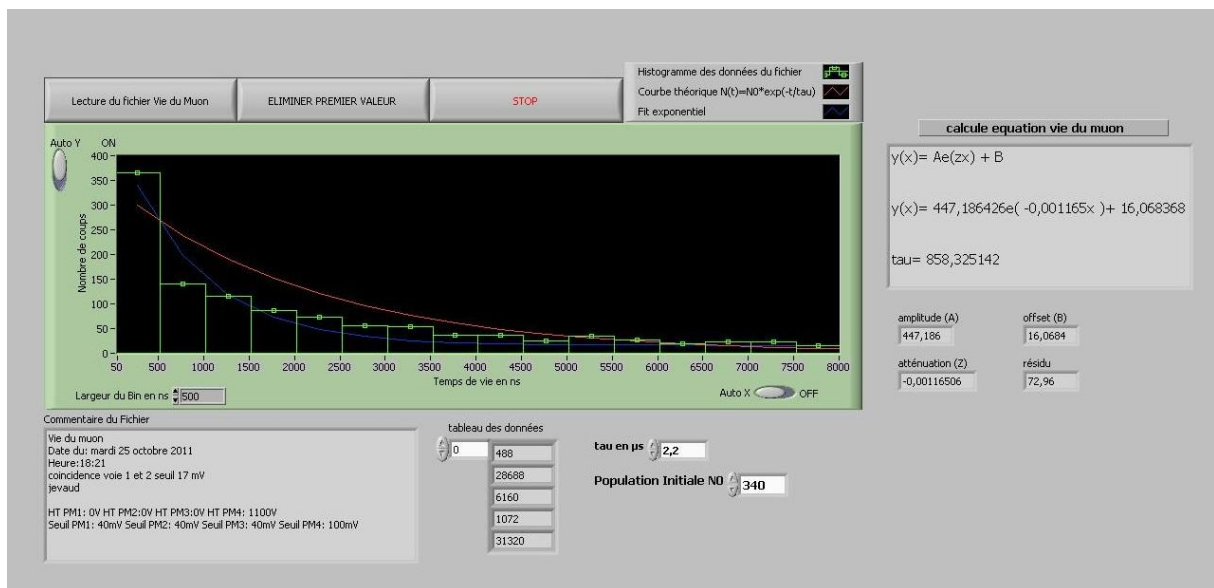
Fichier Edition Format Affichage ?
Vie du muon
Date du: mardi 25 octobre 2011
Heure:18:21
coïncidence voie 1 et 2 seuil 17 mV
jevaud

HT PM1: 0V      HT PM2:0V      HT PM3:0V      HT PM4: 1100V
Seuil PM1: 40mV Seuil PM2: 40mV Seuil PM3: 40mV Seuil PM4: 100mV

HEURE   VIE DU MUON 1 (ns)   VIE DU MUON 2 (ns)
18:22:02      488      0
18:22:05     28688      0
18:22:32     6160      0
18:22:38     1072      0
18:23:02    31320      0
18:23:05      816      0
18:23:14     1720      0
18:23:55    12000      0
18:24:12    26808      0
18:24:50    61328      0
18:24:59    1064      0
18:25:11   41424      0
18:25:14   25936      0
18:25:43   4568      0
18:27:54      88      0
18:28:19   35704      0
18:28:32   52296      0
18:28:51   64472      0
    
```

- **Première méthode de traitement :**

Le fichier .txt créé dans le dossier « fichiers vie du muon » peut être ouvert grâce au logiciel « vie muon » présent sur l'ordinateur.



Le logiciel ajuste la courbe par une loi du type $A \cdot \exp(B \cdot x) + C$, la composante constante modélisant le bruit de fond.

Il est également possible de supprimer le premier bin de données³¹. Ceci est lié au fait que les données correspondant à des temps de vie entre 0 et 100ns ne correspondent pas à des données physiques mais à des artefacts liés aux PMs (présence de pulses secondaires...). Cette méthode permet de donner une bonne approximation de la valeur du temps de vie du muon et de valider le protocole utilisé (durée de la mesure...).

• **Deuxième méthode de traitement :**

Il s'agit de traiter le fichier texte à l'aide d'un tableur³² (type excel, open office...) et d'amener les étudiants à comprendre l'importance du traitement et de la compréhension des données.

Première étape :

La courbe à tracer est le nombre de muons N en fonction du temps. Le fichier brut ne fournit que des durées START-STOP. Il faut donc comptabiliser le nombre de durées START-STOP (colonne F obtenue grâce à la fonction FREQUENCE du tableur) sur un intervalle de temps donné³³ (colonne E de la figure ci-dessous).

	A	B	C	D	E	F
1	Vie du muon					
2	Date du: mardi 25 octobre 2011					
3	Heure: 18:21					
4	coincidence voie 1 et 2 seuil 17 mV					
5	jevaud					
6						
7	HT PM1: 0V	HT PM2: 0V	HT PM3: 0V	HT PM4: 1100V		
8	Seuil PM1: 40mV	Seuil PM2: 40mV	Seuil PM3: 40mV	Seuil PM4: 100mV		
9						
10	HEURE	VIE DU MUON 1 (ns)	VIE DU MUON 2 (ns)		dt	N
11	18:22:02	488	0		0	0
12	18:22:05	28688	0		500	355
13	18:22:32	6160	0		1000	148
14	18:22:38	1072	0		1500	109
15	18:23:02	31320	0		2000	97
16	18:23:05	816	0		2500	71
17	18:23:14	1720	0		3000	59
18	18:23:55	12000	0		3500	50
19	18:24:12	26808	0		4000	40
20	18:24:50	61328	0		4500	35
21	18:24:59	1064	0		5000	26

Deuxième étape :

Il s'agit de déterminer les données physiquement pertinentes :

- On retire les données ayant une durée START-STOP inférieure à 100 ns pour les mêmes raisons que celles indiquées plus haut.
- On utilise les données ayant une durée START-STOP supérieure à 10τ ³⁴ pour évaluer le bruit de fond. A partir d'un ajustement linéaire de cette partie ou bien d'une moyenne de ces valeurs, la valeur obtenue pour le bruit de fond sera retirée de l'ensemble des données³⁵.
- On ajuste les données ayant une durée START-STOP inférieure à $4-5\tau$: la valeur maximale est à ajuster en fonction de votre évaluation du bruit de fond :
 - Les valeurs obtenues sans bruit de fond ne doivent pas devenir négatives (bruit de fond surévalué)

³¹ Attention à ce que sa durée soit effectivement faible et ne supprime pas de données physiques.

³² Le fichier texte a été créé de telle manière que l'importation se fasse sans problème. Remarque : les espaces sont des tabulations.

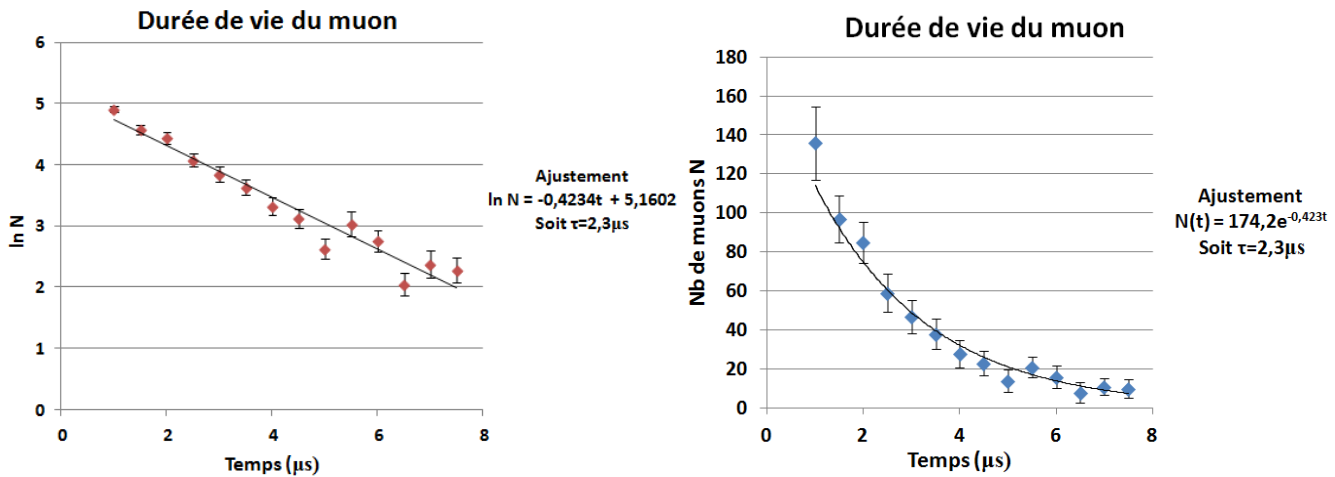
³³ Cet intervalle devra être choisi soigneusement pour que la statistique sur cet intervalle soit suffisante pour éviter des fluctuations trop importantes et ne doit pas être trop grand pour avoir un nombre de points suffisant pour former la courbe.

³⁴ Valeur donnée à titre indicative.

³⁵ Le bruit de fond est considéré comme constant dans le temps.

- Dans le cas d'un bruit de fond sous-évalué, l'augmentation de la plage au-delà de 4 à 5τ entraîne une prise en compte plus importante des points correspondants à du bruit et donc fausse la mesure du temps de vie.

Allure des courbes obtenues :



Les courbes ci-dessus ont été obtenues par un ajustement, par le tableur, exponentiel et linéaire respectivement. Celles-ci nous permettent d'évaluer le temps de vie du muon (à comparer à la valeur théorique du PDG³⁶ : $\tau = 2,197 \cdot 10^{-6} s$) (voir la partie théorique correspondante).

³⁶ Particle Data Group (<http://pdglive.lbl.gov/listings1.brl?quickin=Y>) : ce site regroupe l'ensemble des mesures en physique des particules ainsi que des textes, mis à jour régulièrement, sur les différents domaines de la physique des particules.

v. La provenance des muons

Présentation

Les muons détectés sont d'autant plus nombreux que la direction de détection s'approche de la verticale (voir TP distribution angulaire).

Si les muons sont d'origine céleste (et non terrestre), nous obtiendrons une différence de comptage importante selon que le photomultiplicateur soit vers le haut ou vers le bas.

Pour cela, on utilise le tube de plexiglas permettant la détection de l'effet Cerenkov.

Temps environ 3h

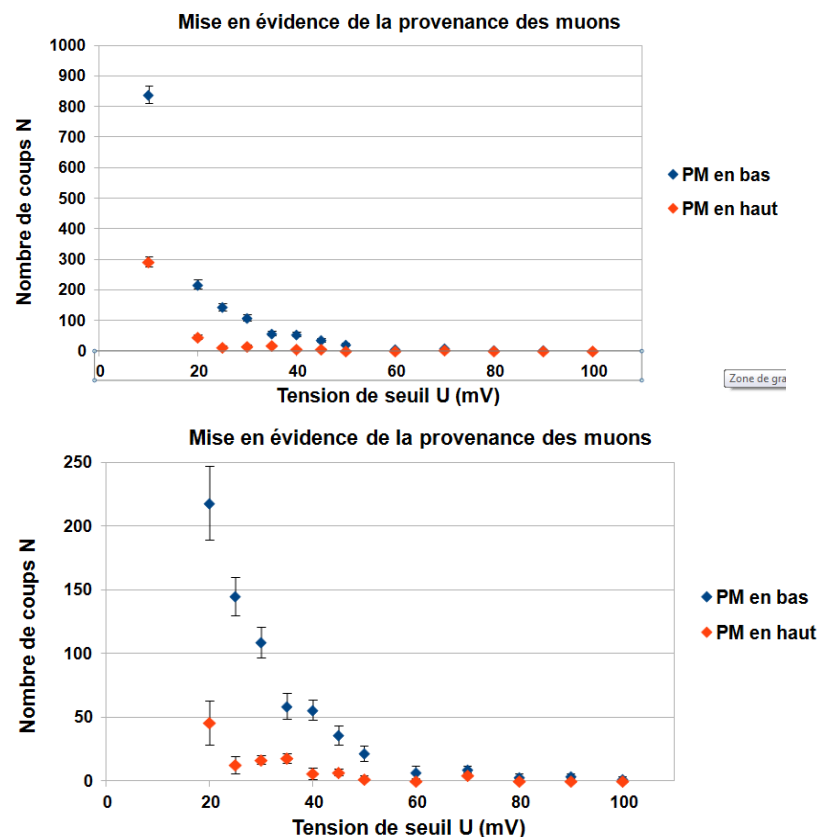
Protocole

Le scintillateur dédié à l'effet Cerenkov devra être branché sur la voie 4 du boîtier électronique.

On mesure le taux de comptage pour différentes valeurs du seuil pendant des durées de 10 minutes³⁷. La tension du PM a été fixée à une valeur optimale préalablement étalonnée ou fournie (ici 1100V).

Résultats

Allure de la courbe attendue



³⁷ Valeur donnée à titre indicative.

Le comptage pour le PM situé en bas est plus élevé que celui pour le PM situé en haut : l'origine céleste des muons a été mise en évidence.

4. Introduction expérimentale à la mesure

a. Erreur

i. Introduction générale

On peut définir l'erreur* de mesure notée ER sur une grandeur* physique X comme « la différence entre une valeur mesurée ou calculée x et la valeur vraie X_{vrai} ³⁸ » soit $ER = x - X_{vrai}$. Dans la très grande majorité des cas, on ne connaît pas la valeur vraie ; sinon, il n'y aurait aucune raison d'en effectuer une mesure³⁹. La valeur vraie est une construction théorique que l'on peut connaître de manière approximative soit grâce aux mesures antérieures soit grâce à des prédictions théoriques. En effet, un résultat de mesure⁴⁰ n'est jamais une valeur : il est donné sous la forme d'un intervalle de valeurs « probables » du mesurande*⁴¹. C'est pour cela qu'à un résultat de mesure, on associe une incertitude⁴² de mesure qui caractérise la dispersion des valeurs attribuées à un mesurande.

On peut globalement distinguer deux types d'erreurs : les erreurs systématiques et les erreurs aléatoires.

(A) Les erreurs systématiques

Les erreurs systématiques notées ERs sont des erreurs constantes (ou à variations lentes). Pour un mesurande donné, elles introduisent systématiquement le même décalage. On a alors $ERs = (\hat{X} - X_{vrai})$ avec \hat{X} le meilleur estimateur de la valeur de la mesurande. Leur origine provient généralement d'un dispositif inadapté ou mal utilisé. Un examen attentif de la chaîne de mesure permet de les réduire. Cependant, il est souvent difficile de les détecter. Pour les mettre en évidence, il faut effectuer deux séries de mesurage*⁴³ du même mesurande avec deux dispositifs différents faisant si possible appel à des méthodes différentes.

La réduction des erreurs systématiques passe souvent par le réétalonnage du capteur ou par le choix d'un capteur ou d'une méthode de mesure plus adaptée. Si l'erreur systématique* est connue, on peut s'en affranchir en post-traitement. Lors de la suite de cet exposé, nous ne traiterons pas des erreurs systématiques, on les considérera comme traitées par ailleurs.

³⁸ La valeur vraie (X_{vrai}) du mesurande est la valeur que l'on obtiendrait si le mesurage était parfait.

³⁹ Le mot « mesure » a, dans la langue française courante, plusieurs significations. Aussi n'est-il pas employé seul dans le présent Vocabulaire. C'est également la raison pour laquelle le mot « mesurage » a été introduit pour qualifier l'action de mesurer. Le mot « mesure » intervient cependant à de nombreuses reprises pour former des termes de ce Vocabulaire, suivant en cela l'usage courant et sans ambiguïté. On peut citer, par exemple : instrument de mesure, appareil de mesure, unité de mesure, méthode de mesure. Cela ne signifie pas que l'utilisation du mot « mesurage » au lieu de « mesure » pour ces termes ne soit pas admissible si l'on y trouve quelque avantage.

⁴⁰ Le résultat de mesure est l'ensemble des valeurs attribuées à un mesurande.

⁴¹ Grandeur que l'on veut mesurer.

⁴² Dans le langage courant, le terme incertitude est lié au doute. Dans le langage scientifique, l'incertitude de mesure définit un intervalle de valeurs « probables » d'une grandeur et cet intervalle est associé à un niveau de confiance (voir partie erreur statistique). Il est fait de même pour les erreurs systématiques que l'on suppose gaussienne et donc on leur associe aussi un niveau de confiance.

⁴³ Ensemble des opérations permettant de déterminer expérimentalement une ou plusieurs valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer à une grandeur.

(B) Les erreurs aléatoires

Les erreurs aléatoires sont les fluctuations des observations qui conduisent à des résultats différents d'une expérience à une autre. On ne peut pas connaître la valeur ni même le signe (supérieure ou inférieure à la valeur vraie) de l'erreur aléatoire notée ERa même si son origine est connue. Ainsi, lors de chaque mesure, l'erreur aléatoire peut prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle donné qui dépend de notre chaîne de mesure. On a alors : $ERa = x_i - \hat{X}$ avec x_i une mesure particulière de l'ensemble N des mesures effectuées et \hat{X} le meilleur estimateur de la valeur de la mesurande. Comme on le verra un peu plus tard, la plupart du temps, le meilleur estimateur du mesurande est la valeur moyenne x des N mesures, soit : $ERa = x_i - \bar{x}$.

Ces erreurs aléatoires sont essentiellement dues :

- aux caractéristiques intrinsèques de la chaîne de mesure ;
- aux signaux parasites d'origine électrique ou thermique.

Ces perturbations sur la mesure proviennent de l'électronique associée au capteur et à la chaîne de mesure. Mais aussi des grandeurs d'influence⁴⁴ que l'on ne mesure pas de façon précise ; ainsi, leurs variations rapides ne sont pas complètement prises en compte dans les caractéristiques ou leur compensation est partiellement incorrecte.

Il est souvent assez difficile d'évaluer les valeurs des erreurs aléatoires⁴⁵ ou même leur ordre de grandeur : on fait appel alors à une approche statistique (ce que l'on fera par la suite dans cet exposé).

(C) Notion justesse* et de fidélité*

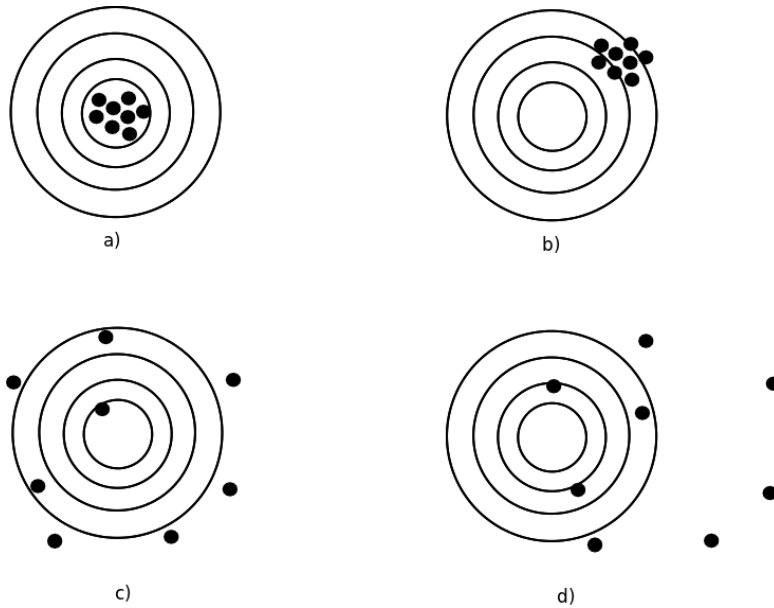
La justesse donne le degré de concordance entre le résultat obtenu et la valeur vraie alors que la fidélité indique le degré de concordance entre les résultats d'une série de mesures d'une même quantité. La justesse exprime alors le fait qu'une mesure est ou non correcte et la fidélité si elle est reproductible.

La fidélité s'évalue simplement en répétant les mesures, elle est donc associée aux erreurs aléatoires. La fidélité d'un instrument de mesure est son aptitude à donner des indications très voisines lors de l'application répétée du même mesurande dans les mêmes conditions. Un instrument est d'autant plus fidèle que l'erreur aléatoire qui lui est associée faible.

Analogie avec une cible

⁴⁴ Une grandeur d'influence est une grandeur qui n'est pas le mesurande mais qui a un effet sur la valeur mesurée

⁴⁵ La réduction des erreurs aléatoires passe par l'amélioration des composantes de la chaîne de mesure et par la protection de cette chaîne (suspension antivibratoire, blindage électromagnétique, stabilisation des grandeurs d'influence). Toutes ces opérations de réduction des erreurs de mesure ont un coût (matériel, temps passé, monétaire...)



Sur le schéma précédent, on considère que la valeur vraie se situe au centre de la cible.

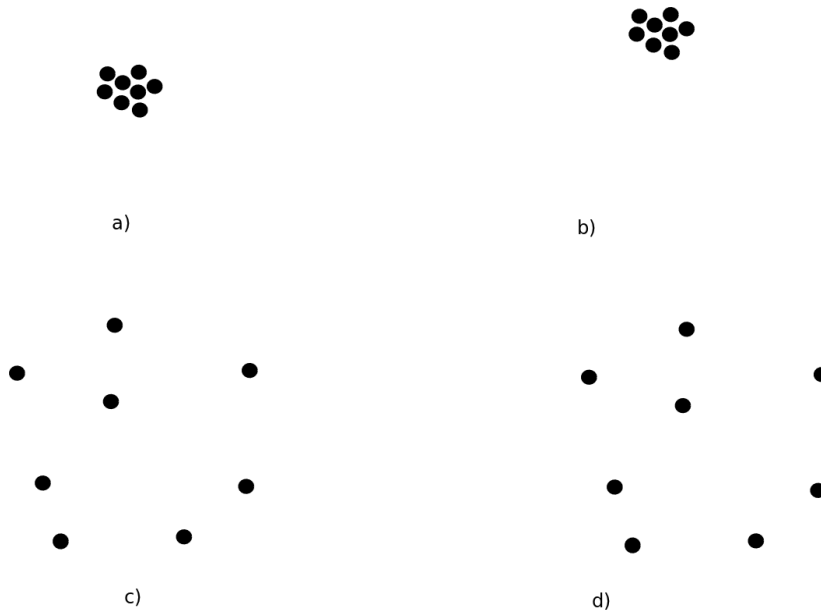
(a) Comme l'ensemble des tirs (mesures) sont proches les unes des autres, on peut dire que la composante aléatoire de l'erreur est faible. De plus, la distribution des tirs est centrée sur le centre de la cible, la composante systématique de l'erreur est très faible.

(b) L'erreur aléatoire est toujours faible mais l'erreur systématique est beaucoup plus importante – les tirs sont systématiquement « décentrés » vers la droite.

(c) Dans ce cas, l'erreur aléatoire est large, mais l'erreur systématique est faible – les tirs sont très étalés mais pas systématiquement « décentrés ».

(d) Ici, à la fois l'erreur aléatoire et l'erreur systématique sont importantes.

Le problème est que l'on ne connaît pas la valeur vraie donc on ne sait pas où se trouve le centre de la cible. La situation lorsque l'on fait une mesure est plutôt la suivante :



On voit alors qu'il est assez simple⁴⁶ de prendre en compte l'erreur aléatoire (il suffit d'estimer la dispersion des points) mais que l'erreur systématique est beaucoup plus délicate à

⁴⁶ À condition de faire plusieurs mesures dans des conditions de reproductibilité

évaluer (comment savoir si c'est la situation a) ou b) qui correspond à la « bonne » mesure ou le cas c) ou d)) : sans référence ou sans mesure effectuée avec une autre technique, il est impossible de déterminer cette erreur systématique.

Remarque : dans les expériences, l'accumulation de prise de données ne change pas la nature de l'erreur aléatoire mais permet un traitement qui rend souvent l'erreur aléatoire négligeable devant les erreurs systématiques. Dans le cas du cosmodétecteur, il peut être intéressant d'évaluer le temps de comptage au-delà duquel ces erreurs deviennent faibles et donc de s'intéresser aux possibles erreurs systématiques.

(D) Retour sur l'erreur de mesure $ER = x - X_{vrai}$

Si on reprend les définitions et les notations précédentes, on obtient

$$ER = x - X_{vrai} = (x - \hat{X}) + (\hat{X} - X_{vrai}) = ERA + ERs$$

Lors d'une mesure, la valeur de l'erreur ER est toujours inconnue. Dans tous les cas, il faudra rechercher un encadrement des valeurs « probables » de l'erreur ER . Cet encadrement sera appelé intervalle de confiance de la valeur de l'erreur ER et il devra être associé à un niveau de confiance.

On peut schématiser cela avec le diagramme suivant :

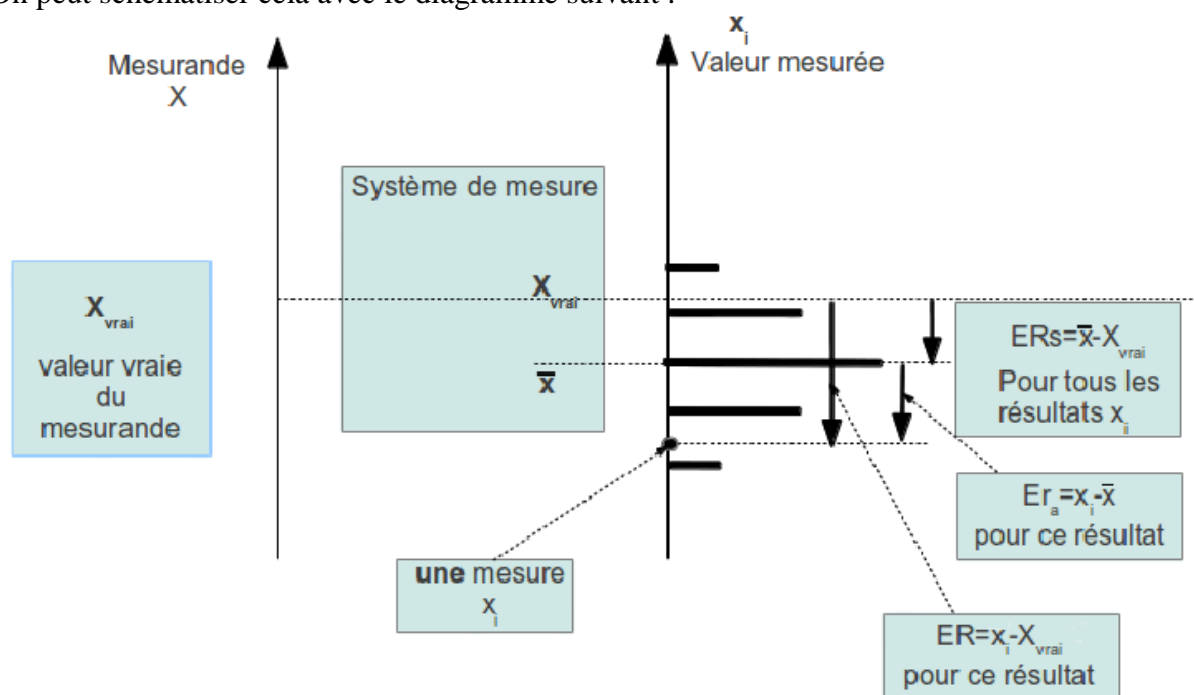


Schéma représentant l'erreur systématique ERs et l'erreur aléatoire ERA

D'après A. Bernard et J.-L. Vidal, Lycée des Catalins, Montélimar

On peut alors faire les remarques suivantes :

- le système de mesure contient tout ce qui est nécessaire pour obtenir une mesure x_i de la valeur du mesurande X (un nombre et une unité);
- on présente le mesurande X_{vrai} à l'entrée du processus de mesure et on réalise N mesures

x_i dans les conditions de répétabilité⁴⁷;

– si le mesurage était parfait, toutes les mesures auraient la même valeur $x_i = X_{vrai}$;

– un mesurage n'est jamais parfait et il y a toujours une erreur de mesure

$ER = (x_i - X_{vrai})$ dont on ne peut connaître que l'intervalle d'incertitude ;

– tous les résultats sont dispersés autour de la valeur moyenne \bar{x} ⁴⁸ des N mesures :

chaque valeur mesurée x_i est affectée par une erreur aléatoire $ERa = (x_i - \bar{x})$;

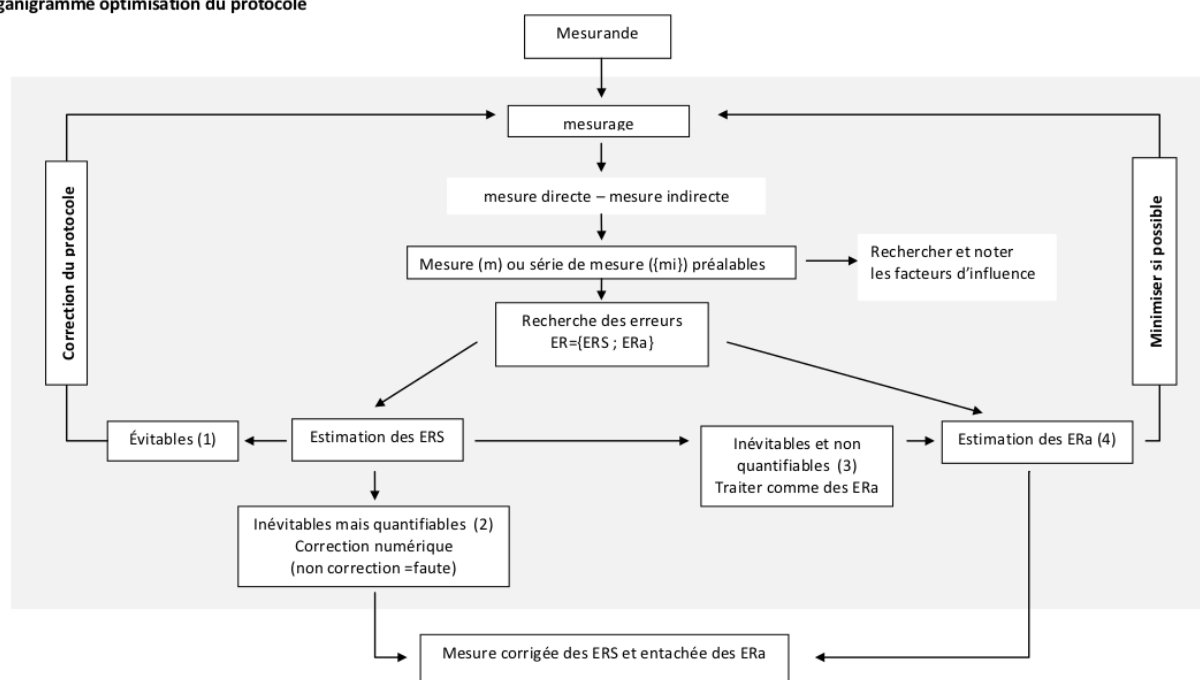
– souvent, tous les résultats sont « décalés » de la même quantité $Rs = (\bar{x} - X_{vrai})$, erreur systématique de mesurage ;

– dans tous les cas, l'erreur de mesure est $ER = ERs + ERa$.

(E) Optimisation du protocole

Un des travaux essentiels de l'expérimentateur est l'optimisation du protocole expérimental dans le but de diminuer autant que faire se peut les erreurs aléatoires et les erreurs systématiques. On peut résumer le travail de celui-ci à l'aide de l'organigramme de la figure suivante.

Organigramme optimisation du protocole



ERa : erreur aléatoire

ERS : erreur systématique

- (1) : erreurs de parallaxe, non rinçage de la burette, mauvaise appréciation de l'équivalence
 (2) : méthode « amont/aval », correction de la poussée d'Archimède
 (3) : appareil non étalonné, carbonatation sous agitation d'une solution basique au cours d'un dosage, électrolyse au cours d'une mesure conductimétrique, évaporation du solvant
 (4) : netteté en optique, mesure de radioactivité, toutes les incertitudes constructeur liées à la classe de l'appareil ...

Organigramme d'optimisation du protocole. D'après le GRIESP.

⁴⁷ Le même opérateur, ou le même programme, effectue N mesures, avec le même instrument, exactement dans les mêmes conditions.

⁴⁸ On considère dans ce cas que la valeur moyenne est le meilleur estimateur.

ii. Expérience réalisée avec le cosmodétecteur

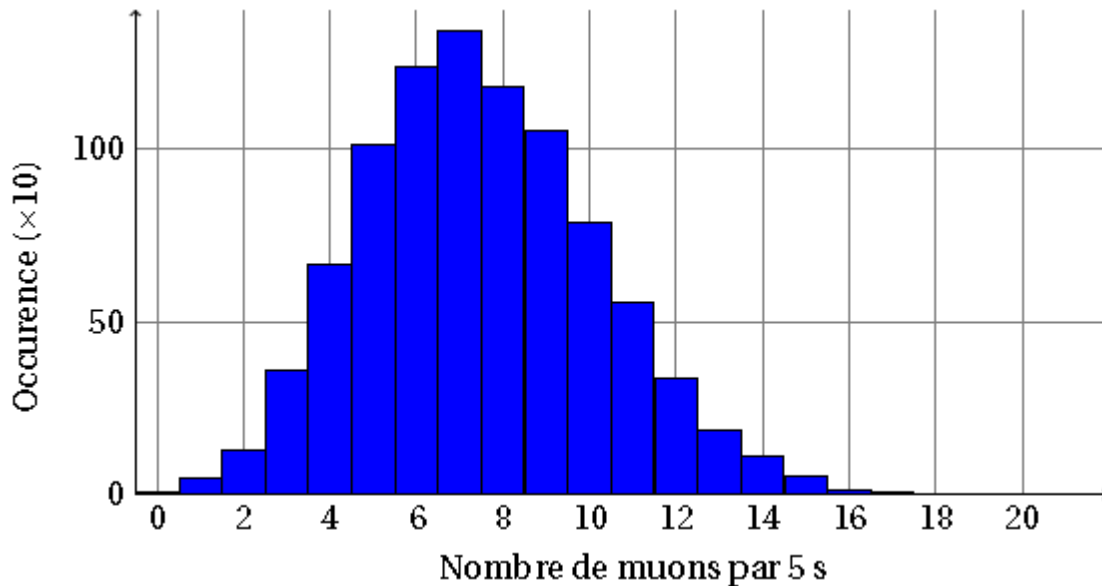
(A) Présentation de l'expérience

Une expérience de comptage des muons a été effectuée toute une nuit pendant 13 h. L'objectif était de déterminer le nombre de muons détectés par le cosmodétecteur par seconde. L'appareil était réglé par défaut et comptait les muons par intervalle de temps de 5 s. Cela revenait donc à faire l'expérience de comptage 9 060 fois.

(B) Présentation des résultats

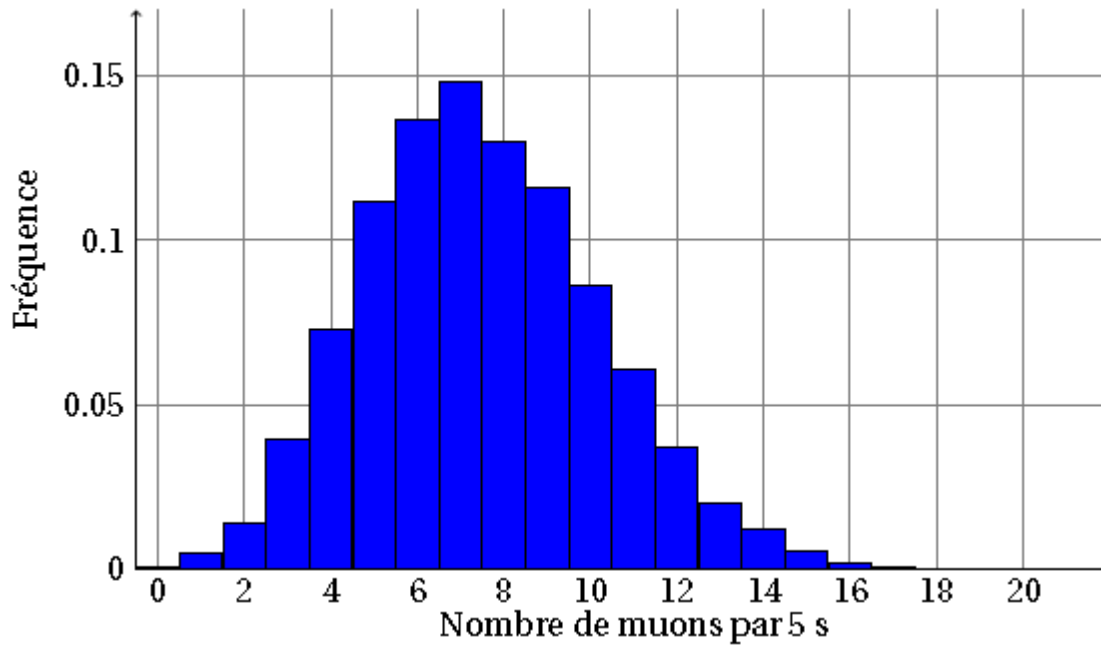
Première représentation

Si l'on appelle x_i le résultat d'une mesure c'est-à-dire le «nombre de muons par intervalle de 5 s», k_i le nombre de fois où la mesure x_i a été obtenue et N le nombre total d'expériences réalisées, on obtient l'histogramme suivant représentant k_i en fonction de x_i :



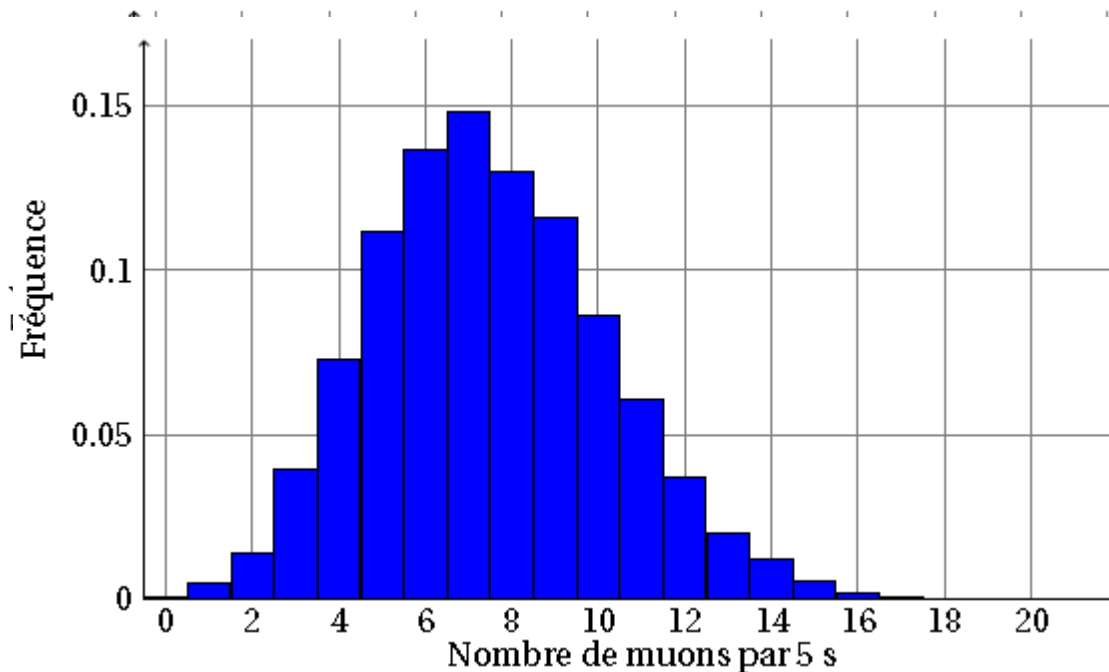
Histogramme représentant le nombre de comptage k_i en fonction du nombre de muons x_i détectés par intervalle de 5 s.

En statistique, on travaille plutôt avec les fréquences $f(i) = k_i/N$. Si on représente alors les fréquences $f(i)$ en fonction de x_i , on obtient :



Histogramme représentant la fréquence f_i des comptages en fonction du nombre de muons x_i détectés par intervalle de 5s

On montrera plus tard que cet histogramme des fréquences peut être ajusté par une courbe disymétrique de Poisson. On a alors :

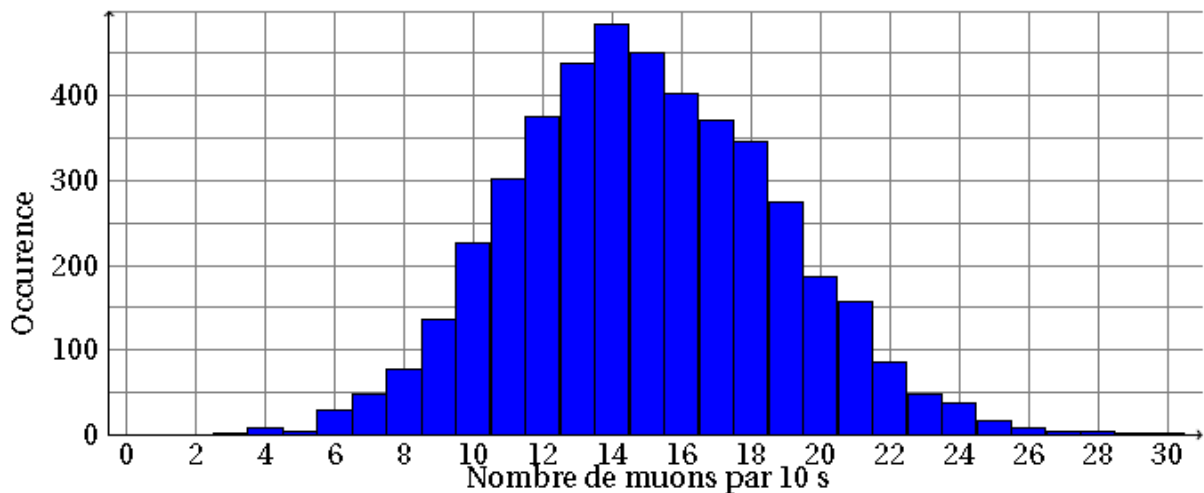


Histogramme représentant la fréquence f_i des comptages en fonction du nombre de muons x_i détectés par intervalle de 5s et courbe de Poisson ajustée.

Les résultats sont dispersés de façon disymétrique : les résultats qui suivent une courbe de Poisson sont plus complexe à traiter en ce qui concerne les incertitudes.

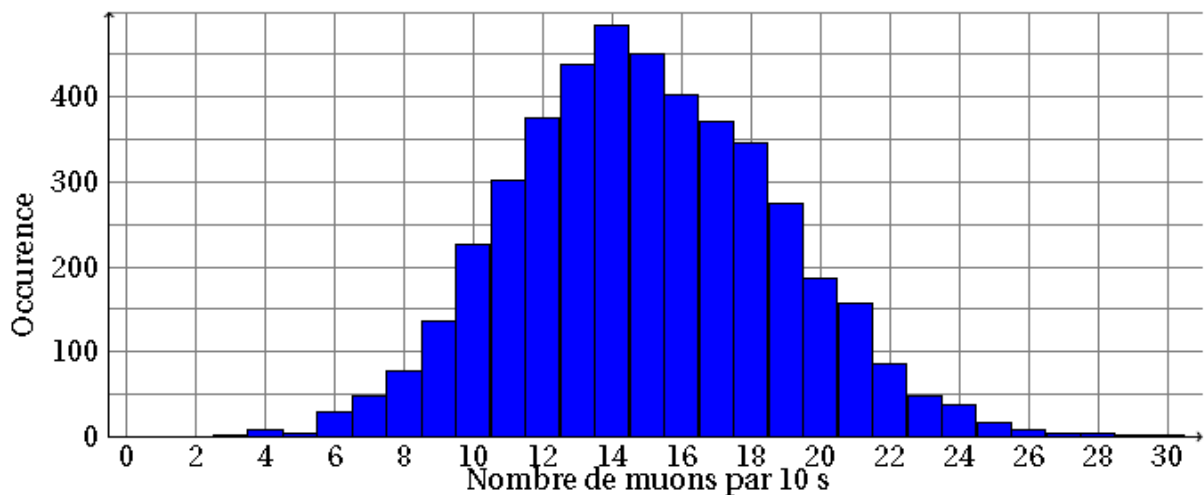
Seconde représentation

Sans toucher aux données et à l'information contenue dans ces données, en changeant juste le mode de représentation pour que le traitement soit plus aisé, on va regrouper les expériences de comptage par deux. Ainsi, au lieu d'avoir 9060 expériences de 5 s, cela reviendra à avoir 4 530 expériences de 10 s. En effectuant ce regroupement, on a alors x'_i qui représente le résultat d'une mesure (d'un comptage) mais pendant un intervalle de 10 s, N' est le nombre d'expériences (ici 9060/2) et k'_i le nombre de fois où la mesure x_i a été obtenue, on obtient l'histogramme suivant:



Histogramme représentant le nombre de comptages k'_i en fonction du nombre de muons x_i détectés par intervalle de 10 s.

Si on note $f'(i) = k'_i/N'$ la fréquence du résultat x'_i . Si on représente cette fréquence $f'(i)$ en fonction de k'_i , on montrera plus tard que cet histogramme des fréquences peut être ajusté par une courbe symétrique de Gauss. On a alors :



Histogramme représentant le nombre de comptages k'_i en fonction du nombre de muons x_i détectés par intervalle de 10 s ajusté par une courbe de Gauss.

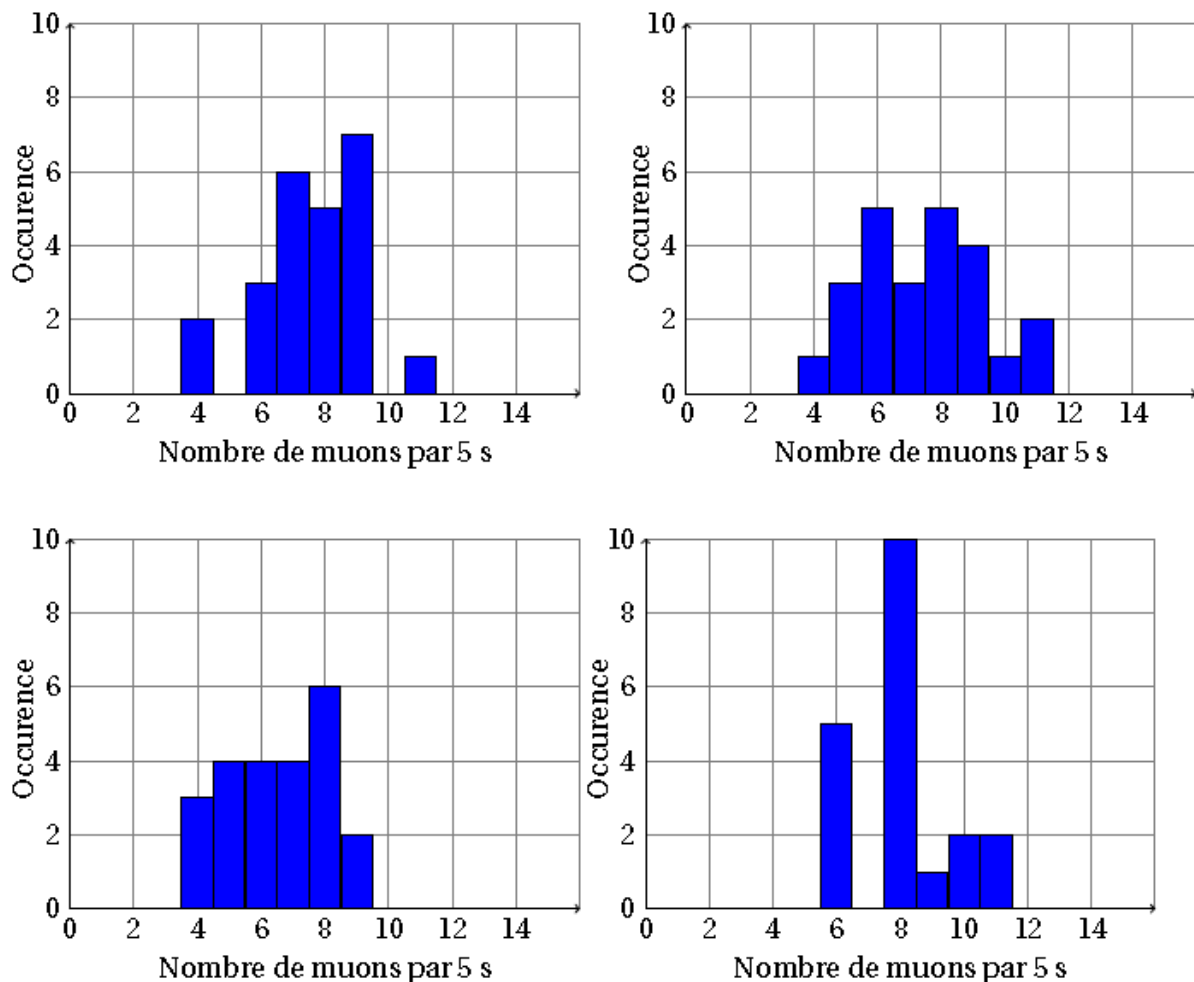
On constate que les valeurs sont dispersées symétriquement autour d'une valeur médiane.

Troisième représentation

On peut aussi se dire que notre objectif étant de déterminer le nombre de muons détectés par seconde, il peut être judicieux de comptabiliser tous les muons détectés pendant le temps total d'expérience. On a alors le résultat suivant, 67 821 muons ont été détectés pendant ces 13 h. Il semble simple alors pour trouver le résultat recherché de diviser le nombre total de muons par le nombre de secondes de l'expérience. Cependant, on ne tient pas compte des fluctuations de la mesure ; ainsi, si le lendemain cette expérience était de nouveau réalisée dans les mêmes conditions (même temps total d'expérience), il est à parier que le résultat sera différent, il pourra être de 67 001 ou 68 123 ou une autre valeur encore. Il faut donc évaluer ces fluctuations de comptage.

Pour bien comprendre la situation, effectuons un mesurage constitué de 24 comptages de 5 s chacun, ce qui nous donne une expérience dont le temps total est de 2 min.

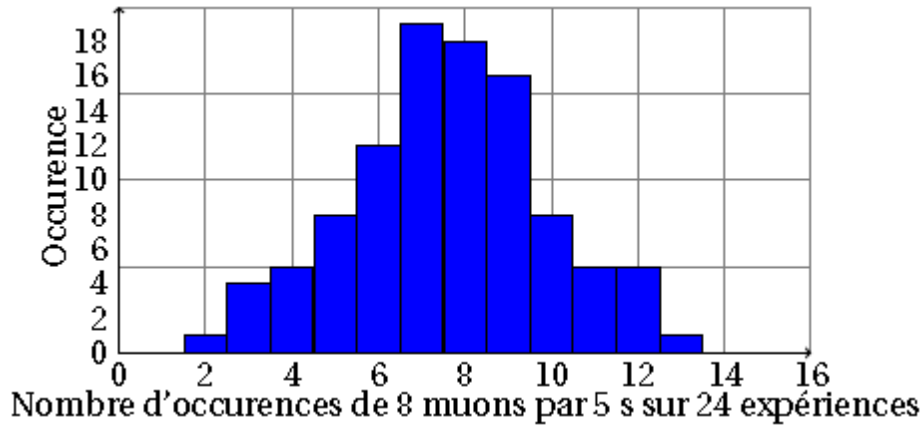
Les résultats sont les suivants :



Quatre échantillons de 24 expériences : comptage du nombre de muons détectés par intervalle de 5 s

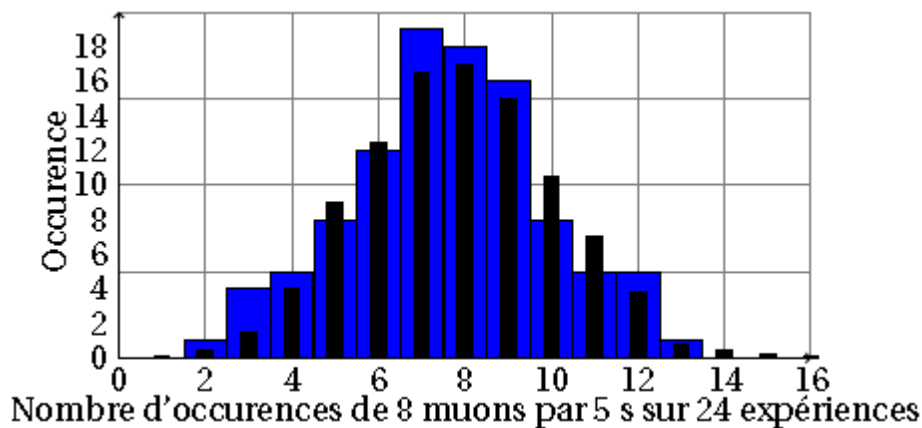
On constate que les valeurs obtenues pour chaque comptage sont différentes à chaque expérience (une expérience dure 5 s). Ainsi, par exemple, la valeur « 8 muons par 5 secondes » vaut 5 dans la première expérience, 5 dans la seconde, 6 dans la troisième et 10 dans la quatrième

En effectuant d'autres échantillons de ce mesurage (24 expériences de 5 s), on obtient les occurrences suivantes pour la valeur 8 muons par 5 s. On représente sur un graphe ces valeurs (l'échantillon a été réalisé 100 fois). En abscisse, on a le nombre de fois où l'on a obtenu « 8 muons par 5 s » dans un échantillon et en ordonnée le nombre de fois où ce résultat apparaît sur les 100 échantillons.



Histogramme décrivant les fluctuations statistiques pour la valeur « 8 muons par 5 s »

On va montrer que, dans ce cas, les données peuvent être approximées par une distribution binomiale.



Histogramme décrivant les fluctuations statistiques pour la valeur « 8 muons par 5 s » et ajustement avec une distribution binomiale

Premier bilan

On a vu que, dans le premier cas, on pouvait ajuster nos mesures à une courbe de Poisson; dans le second, il est possible d'ajuster avec une courbe de Gauss et dans le troisième cas, on a vu que la fonction binomiale modélisait les fluctuations de comptage. De plus, dans nos trois manières de représenter les résultats, il est nécessaire d'évaluer la dispersion des mesures. Ainsi, ces trois fonctions (celle de Poisson, de Gauss et la binomiale) que l'on appelle des fonctions de distributions vont nous permettre d'avoir des modèles pour analyser nos résultats de mesure (moyenne, étalement de la mesure, plage de confiance...).

La seconde partie de ce chapitre est consacrée à l'étude de ces fonctions de distribution qui constituent des modèles pour pouvoir étudier nos résultats expérimentaux.

iii. Les fonctions de distribution

(A)

Variable aléatoire

On appelle variable aléatoire une variable X susceptible de prendre différentes valeurs, auxquelles il est possible d'affecter une probabilité. Soit V l'ensemble des valeurs possibles de X : si V est fini ou dénombrable, on dit que la variable est discrète. Dans le cas contraire, la variable est dite continue.

Exemples :

- dans le lancer de dé, la variable aléatoire $X = \{1,2,3, 4, 5,6\}$ est discrète et ne peut prendre que 6 valeurs ;
- la vitesse d'une voiture est une variable continue ;
- la plupart des observables physiques (température, pression, longueur...) sont des variables continues ;
- les variables discrètes apparaissent généralement dans les expériences où il y a dénombrement (exemple : cosmodétecteur, CRAB...).

(B)

Loi de probabilité

Soit $p(x)$, la probabilité qu'une variable aléatoire discrète X prenne la valeur x . L'ensemble des couples $(x,p(x))$ est appelé loi de probabilité de la variable aléatoire. Elle peut être représentée par un histogramme.

Lorsque la variable est continue, la probabilité que X prenne la valeur x est généralement infiniment petite. Ainsi, si on tire au hasard des nombres réels répartis uniformément entre 0 et 5, la probabilité qu'un tel nombre soit exactement égal à 1,2367744 est très faible, quoique non nulle.

Il devient dès lors plus intéressant de calculer la probabilité que X prenne une valeur dans un petit intervalle :

$$Prob(a < X \leq b) = Prob(X \leq b) - Prob(X < a)$$

La quantité

$$\frac{Prob(X \leq b) - Prob(X < a)}{b - a}$$

définit la densité de probabilité dans l'intervalle $]a,b]$. Par passage à la limite, on définit :

$$p(a) = \lim_{b \rightarrow a} \frac{Prob(X \leq b) - Prob(X < a)}{b - a}$$

La quantité $\int_c^d p(x)dx$ équivaut à la probabilité que la variable X prenne une valeur située entre c et d .

Exemple : dans le lancer d'un dé non truqué, la loi de probabilité discrète se résume à :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Autre exemple, la probabilité de tirer un nombre aléatoire issu d'un échantillon uniforme sur l'intervalle $[0,1[$ vaut :

$$p(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0,1[\\ x, & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour une variable discrète, la probabilité de tirer une valeur parmi toutes les valeurs possibles vaut obligatoirement 1 car on est sûr du résultat. Cela signifie que l'on a toujours :

$$\sum_{x \in X} p(x) = \sum_i p(x_i) = 1$$

De la même façon, pour une variable continue, la probabilité de tirer une valeur parmi l'ensemble des valeurs possibles est toujours égale à 1. On a donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$$

Ces résultats sont valables quelle que soit la loi de probabilité⁴⁹. On appelle ces probabilités $p(x)$ des fonctions de distribution ou de probabilité.

(C) Propriétés des fonctions de probabilité

Pour caractériser une fonction de distribution, on a besoin d'au moins deux paramètres :

- son espérance l'équivalent en probabilité de la moyenne d'une série statistique en statistiques que l'on notera μ .
- son étalement c'est-à-dire un paramètre caractérisant la largeur de cette courbe. Celui-ci est décrit par sa variance σ^2 ou carré de l'écart-type σ .

On définit μ tel que :

- $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) dx$ dans le cas continu
- $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot P(x_i)$ dans le cas discret

Exemple : dans le lancer d'un dé non truqué, l'espérance vaut :

$$\mu = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

ce résultat est exact et ne dépend pas du nombre de lancers.

et σ^2 par :

- $\sigma^2 = \overline{(x - \mu)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot p(x) dx$ dans le cas continu
- $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu)^2 \cdot P(x_i)$ dans le cas discret

Pour chaque valeur de x , on considère l'écart à l'espérance μ et on calcule la valeur moyenne du carré de cet écart⁵⁰.

Ces définitions sont complètement générales et sont valables pour toutes les distributions. Il existe un certain nombre de fonctions de distribution type (distribution de Gauss ou normale, distribution de Poisson, distribution binomiale...). Nous allons étudier deux distributions particulièrement utiles pour l'analyse des résultats du cosmodétecteur.

Exemple : dans le lancer de d'un dé non truqué, l'écart-type vaut :

$$\sigma^2 = (1 - \frac{7}{2})^2 \cdot \frac{1}{6} + (2 - \frac{7}{2})^2 \cdot \frac{1}{6} + (3 - \frac{7}{2})^2 \cdot \frac{1}{6} + (4 - \frac{7}{2})^2 \cdot \frac{1}{6} + (5 - \frac{7}{2})^2 \cdot \frac{1}{6} + (6 - \frac{7}{2})^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{35}{12}$$

ce résultat est lui aussi exact et ne dépend pas du nombre de lancers.

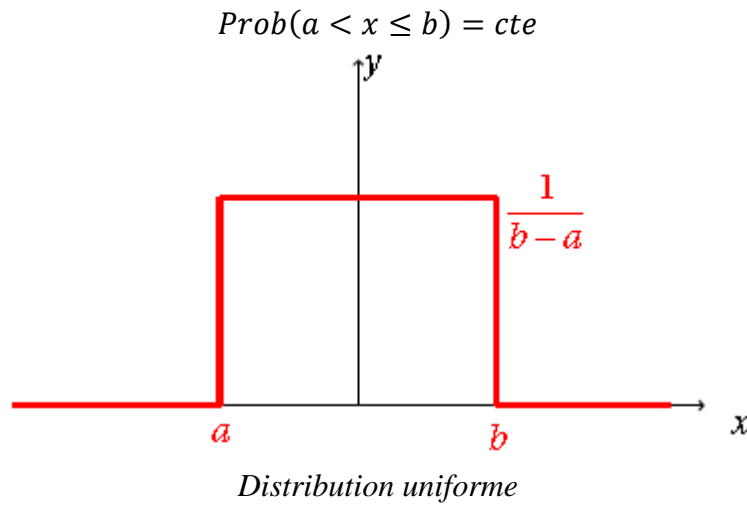
⁴⁹ Pour une variable discrète, chaque probabilité satisfait forcément $p(x) \leq 1$, puisque la somme des probabilités est égale à 1. La probabilité $p(x)$ est alors un nombre sans unité.

En revanche, pour une variable continue, il est tout à fait possible d'avoir $p(x) > 1$, puisque c'est l'intégrale qui est bornée. En outre $p(x)$ peut s'exprimer en unités physiques. Par exemple, si x est une longueur mesurée en [m], alors $p(x)$ s'exprimera en [m]⁻¹.

⁵⁰ On n'utilise pas la valeur moyenne de l'écart car celle-ci est nulle.

(D) Fonction de distribution uniforme

La loi uniforme décrit une variable aléatoire X dont les valeurs sont équiprobables sur un intervalle $[a, b[$:



On a $\int_a^b p(x)dx = 1$, cela donne :

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{si } x \in [a, b[\\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

On montre dans ce cas que :

$$\mu = \frac{(a+b)}{2}$$

$$\sigma = \frac{(b-a)}{\sqrt{12}}$$

(E) Fonction de distribution binomiale**Pile ou face (ou la loi de Bernoulli)**

La loi de Bernoulli est l'expression la plus simple d'une loi de probabilité. Elle s'exprime par une variable aléatoire X qui n'a que deux états : elle prend soit la valeur 1 (pile), avec une probabilité p , soit la valeur 0 (ou face), avec une probabilité q .

$$Prob(X = 1) = p, Prob(X = 0) = q \text{ et } p + q = 1$$

L'espérance vaut dans ce cas

$$\mu = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$$

et la variance

$$\sigma^2 = (1-p)^2 \cdot p + (0-p)^2 \cdot q = p(1-p) = pq$$

Exemple : dans le jeu de pile ou face, avec une pièce non truquée, on a $p = q = 1/2$

Introduction à la loi binomiale

On lance quatre pièces de monnaie ($n=4$) et que l'on compte le nombre de « face » obtenu, x . Quelle est la probabilité d'obtenir les différentes valeurs possibles de $x=0,1,2,3,4$?

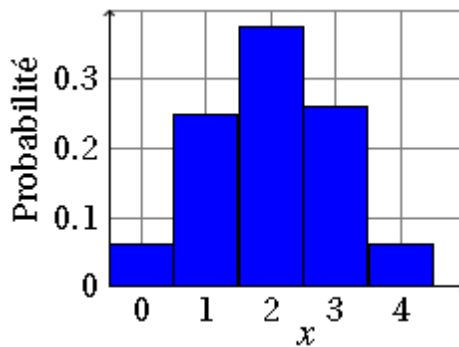
La probabilité d'obtenir face avec une pièce est $p = \frac{1}{2}$ (loi de Bernoulli).

La probabilité $P(x; n)$ d'observer x pièces tombant sur « face » et $n-x$ sur « pile » est le produit du nombre de différentes combinaisons possibles $C(n, x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} = \binom{n}{x}$ par la probabilité que chacune de ces combinaisons arrive c'est-à-dire $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

On peut séparer ces probabilités pour chaque combinaison en deux parties : une partie est la probabilité $p^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ que x pièces tombent sur face et l'autre partie est la probabilité $q^{n-x} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-x}$ que les autres $n-x$ pièces tombent sur « pile ». Le produit de ces deux parties $p^x q^{n-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est la probabilité de la combinaison telle que x pièces tombent sur face et $n-x$ pièces tombent sur « pile ». Ainsi, dans notre exemple, on a :

$$P(x; 4) = \frac{4!}{x!(4-x)!} p^x q^{4-x} = \frac{4!}{x!(4-x)!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \text{ avec } x = 0, 1, 2, 3, 4$$

Si on trace cette fonction $P(x; 4)$, on obtient :



Distribution binomiale pour $n=4$ et $p=1/2$

En règle générale, la probabilité p de succès pour chaque épreuve n'est pas égale à la probabilité $q=1-p$ d'échec. Par exemple, lorsque l'on lance un dé, la probabilité qu'une valeur particulière soit tirée est $p = \frac{1}{6}$, alors que la probabilité de tirer l'une des 5 autres valeurs est $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ dans ce cas, $p^x q^{n-x} = \left(\frac{1}{6}\right)^x \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-x}$

Loi binomiale

Une loi binomiale de paramètres n et p est une loi de probabilité qui correspond à l'expérience suivante :

On renouvelle n fois de manière indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre p . On compte alors le nombre de succès x obtenus à l'issue des n épreuves et on appelle X la variable aléatoire correspondant à ce nombre de succès.

On a ainsi :

$$P_B(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

La loi binomiale intervient fréquemment dans les phénomènes physiques où il n'existe que deux états possibles, chacun étant assorti d'une probabilité. On utilise ainsi la loi binomiale pour les fluctuations de comptages ou les marches aléatoires décrivant le mouvement brownien.

Moyenne et écart-type

En utilisant la définition de μ du paragraphe 1.3.1., on a :

$$\mu = \sum_{x=0}^n x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} = np$$

et pour σ , on a :

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^n (x - \mu)^2 \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} = np(1-p)$$

(F) Fonction de distribution poissonnienne

La distribution de Poisson est une approximation de la distribution binomiale dans le cas où la moyenne du nombre de succès est largement plus petite que le nombre totale de tirages, c'est à dire lorsque $\mu \ll n$ car $p \ll 1$. On rencontre ainsi cette distribution dans des situations où des évènements rares et indépendants se produisent aléatoirement dans le temps avec une probabilité par unité de temps connue. Si les évènements sont indépendants les uns des autres, le nombre x d'évènements qui se produisent pendant une durée fixe est une grandeur aléatoire dont la distribution de probabilité est la loi de Poisson :

$$P_{\mu}(x) = \frac{\mu^x}{x!} \exp(-\mu)$$

μ correspond alors au nombre moyen d'évènements observés.

On rencontre par exemple la distribution de Poisson lorsque l'on compte peu de muons par 5s où lorsque l'on diminue le temps de 5s (temps d'expérience). La loi de Poisson décrit bien des phénomènes de comptage : détection de photons par un photomultiplicateur, comptage de particules émises lors de désintégrations radioactives, comptage d'ions dans un spectromètre de masse, comptage d'individus en microbiologie...

Moyenne et écart-type

La distribution de Poisson n'est pas symétrique autour de sa moyenne. Une de ses particularité est qu'elle ne dépend que d'un seul paramètre.

En utilisant la définition de μ du paragraphe 1.3.1., on a :

$$\mu = np$$

et pour σ , on a :

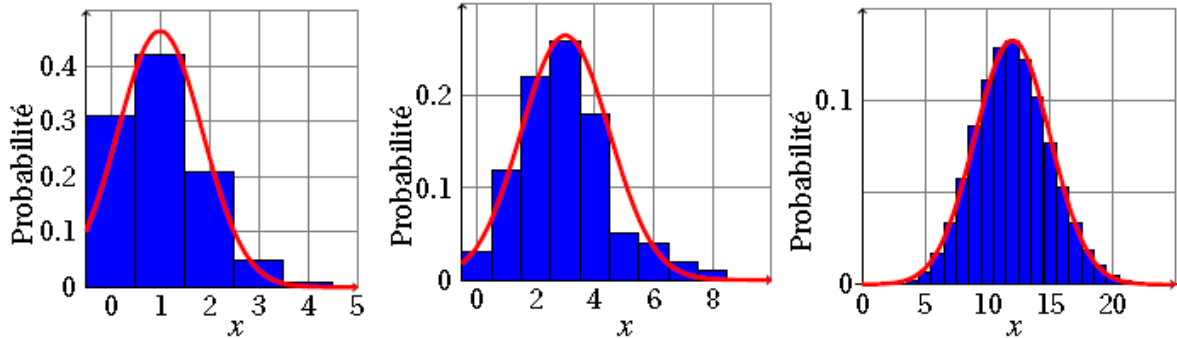
$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^n (x - \mu)^2 \frac{\mu^x}{x!} \exp(-\mu) = \mu$$

Exemple : une décharge lumineuse émet en moyenne $N = 3 \times 10^{10}$ photons par seconde. Sur ceux-ci, seule une très faible fraction $p = 5 \times 10^{-9}$ pénètre dans un photomultiplicateur. Le nombre moyen de photons détectés en une seconde vaut donc $\mu = N.p = 150$. Ce nombre fluctue au cours du temps avec un écart-type qui vaut $\sigma = \sqrt{\mu} = 12,2$

(G) Fonction de distribution gaussienne ou normale

Description de la distribution gaussienne

La distribution gaussienne est une approximation de la loi binomiale dans le cas limite particulier où le nombre d'observations possibles n devient infini et que la probabilité de succès p pour chacune est grande dans ce cas, $np \gg 1$. On approche alors cette loi binomiale par la loi normale ayant même espérance $\mu = np$ et même variance $\sigma^2 = np(1 - p)$. On peut le constater sur ce graphe.



(a) binomiale : $n = 3$, $p = 1/4$,
gaussienne : $\mu = 3/4$, $\sigma_x = 3/4$

(b) binomiale : $n = 12$, $p = 1/4$,
gaussienne : $\mu = 3$, $\sigma_x = 3/2$

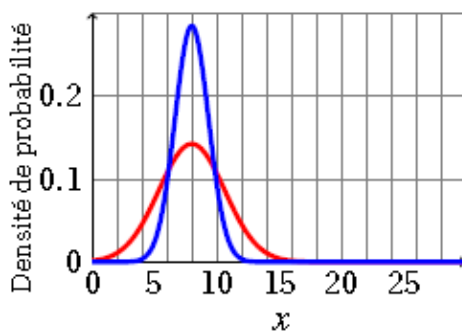
(c) binomiale : $n = 48$, $p = 1/4$,
gaussienne : $\mu = 12$, $\sigma_x = 3$

Distributions binomiales pour différentes valeurs de p et n et distributions gaussiennes pour différentes espérances μ et écart-type σ

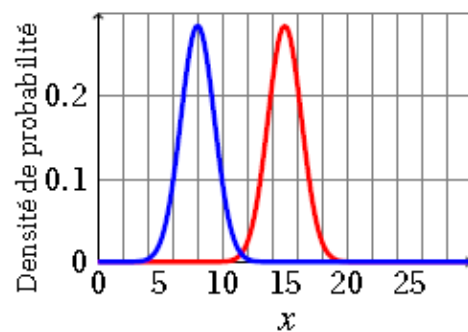
Dans le cas d'une gaussienne, la densité de probabilité $f(x)$ est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

C'est une fonction continue qui décrit la probabilité d'obtenir la valeur aléatoire x . Elle est caractérisée par deux paramètres μ et σ , correspondant respectivement à l'espérance et à l'écart-type.



Influence de σ sur la distribution de Gauss



Influence de μ sur la distribution de Gauss

On constate dans l'expérience de comptage du nombre de muons que lorsque l'on augmente le temps de comptages donc le nombre de fois où l'on fait l'expérience, on tend vers une fonction limite qui est une fonction gaussienne⁵¹.

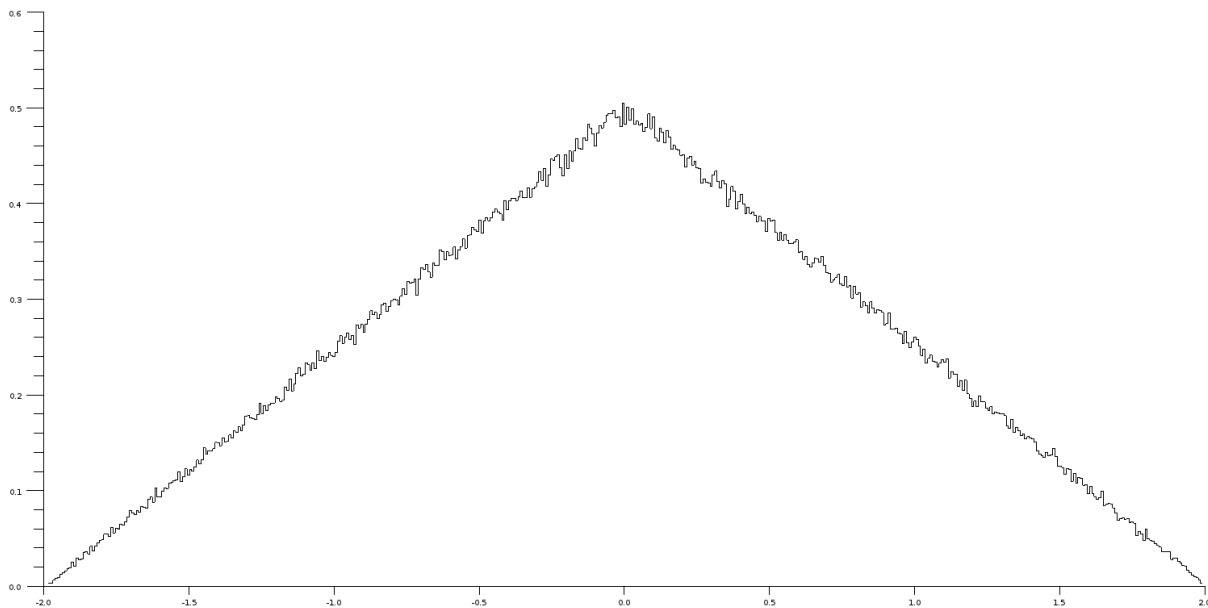
⁵¹ Le théorème central limite (parfois appelé théorème de la limite centrale) établit la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires vers la loi normale. Intuitivement, ce résultat affirme que toute somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées tend vers une variable aléatoire gaussienne.

Théorème de la limite centrale

Un très grand nombre de phénomènes aléatoires présentent des distributions qui sont ou suivent de très près une loi normale. Cela s'explique par le théorème central limite.

Cela revient à dire que, si une grandeur physique subit l'influence d'un nombre important de facteurs indépendants, et si l'influence de chaque facteur pris indépendamment est petit par rapport à la valeur de la grandeur étudiée, alors la distribution de cette grandeur tend vers une loi normale.

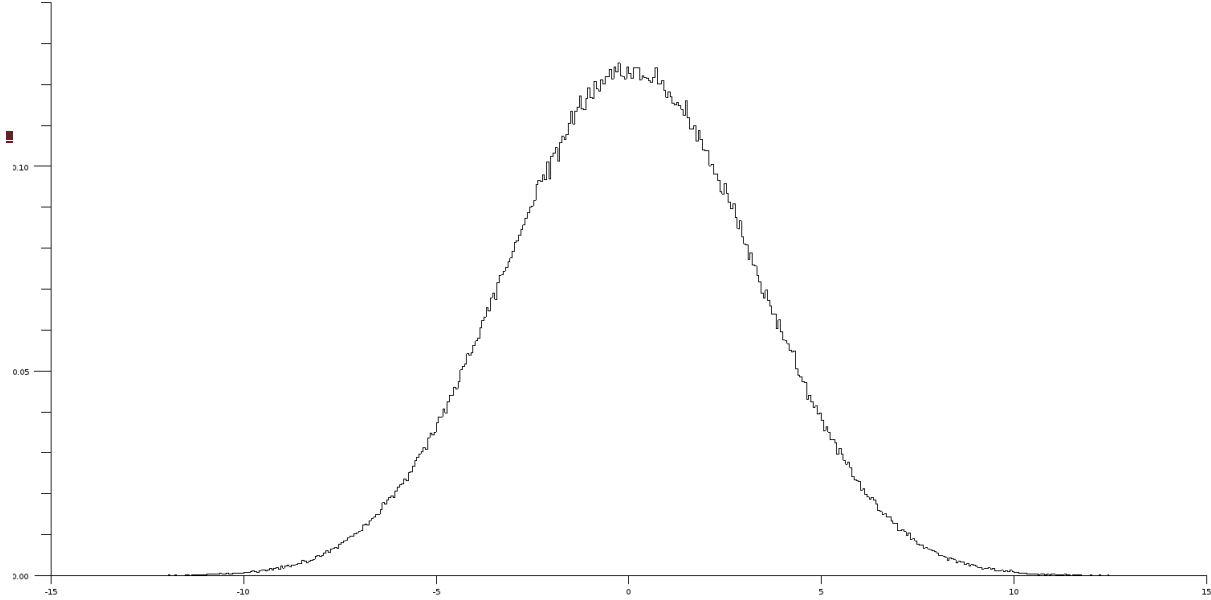
On réalise deux simulations avec Scilab⁵². La première simulation, on considère un cas où l'on a deux erreurs aléatoire chacune étant modélisé par une fonction de distribution rectangulaire de même intervalle. La composition de ces deux distribution rectangulaire nous donne une distribution triangulaire :



Composition de deux erreurs aléatoires de distribution rectangulaire (les unités sont arbitraires)

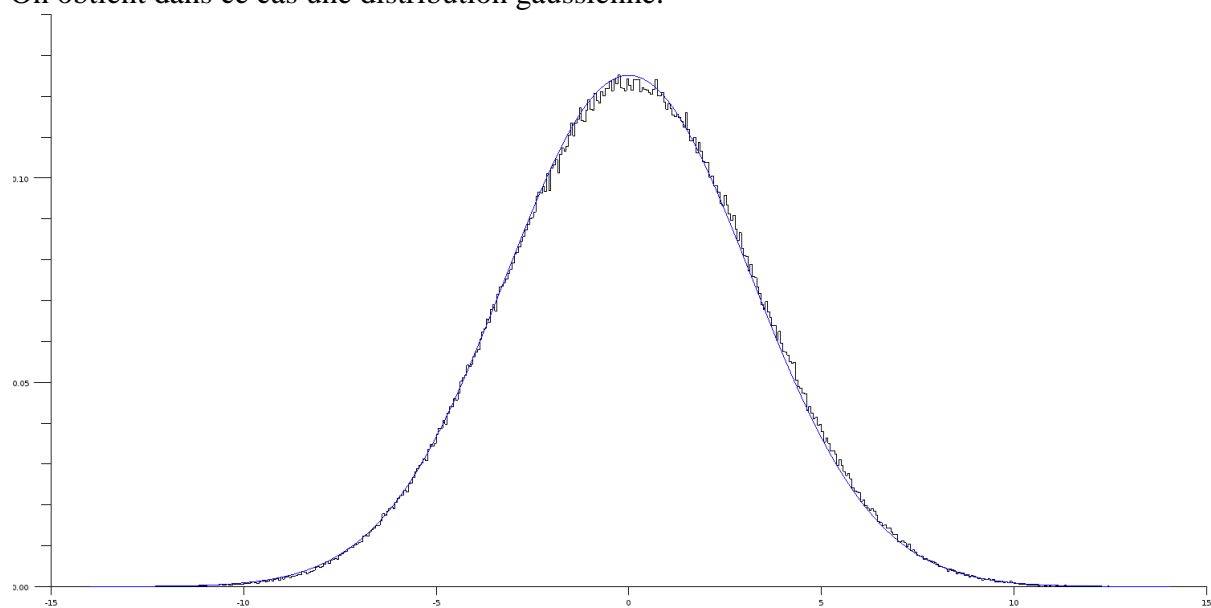
Maintenant, on simule vingt erreurs aléatoires que l'on considérera elles aussi comme de distribution rectangulaire mais n'étant pas défini nécessairement avec le même intervalle.

⁵² On peut aussi utiliser le logiciel Gum_MC réalisé par J.-M. BIAN SAN Le logiciel Gum_MC est un logiciel libre sous licence GNU GPL que l'on peut télécharger sur le site de l'auteur à l'adresse http://jeanmarie.biansan.free.fr/gum_mc.html



Composition de vingt erreurs aléatoires de distribution rectangulaire (les unités sont arbitraires)

On obtient dans ce cas une distribution gaussienne.



Composition de vingt erreurs aléatoires de distribution rectangulaire (les unités sont arbitraires) ajustées par une gaussienne

Distribution gaussienne et niveau de confiance

Le théorème central limite nous permet de dire qu'un grand nombre de résultats de mesures physiques peuvent être décrites par la distribution gaussienne. En effet, dans la très grande majorité des cas, il y a un grand nombre d'erreurs aléatoires qui perturbent la mesure.

La distribution gaussienne est entièrement déterminée par les valeurs (μ, σ) et un grand nombre de grandeurs physiques peut être décrit par cette distribution (qui, par définition, est inconnue !). Les résultats expérimentaux peuvent alors être caractérisés par deux valeurs seulement. Par convention, on présente ces derniers sous la forme

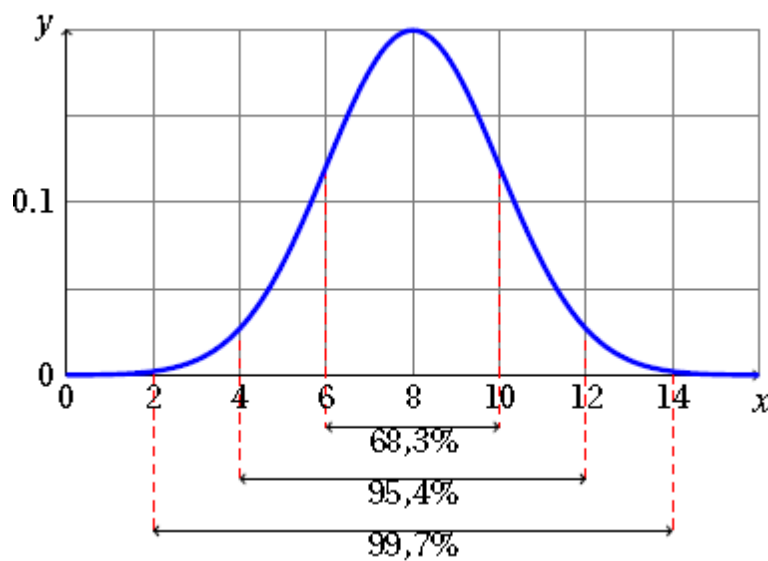
$$x_{exp} = \mu \pm \Delta x$$

avec Δx l'incertitude. Ecrire le résultat sous cette forme ne nous garantit pas à 100% que notre résultat sera situé entre $\mu - \Delta x$ et $\mu + \Delta x$ mais indique seulement une probabilité que notre résultat se trouve entre ces bornes. On définit alors un niveau de confiance pour notre résultat.

Ainsi, la probabilité d'avoir un résultat compris :

- dans l'intervalle $[\mu - \sigma ; \mu + \sigma]$ est tel que : $\int_{\mu - \sigma}^{\mu + \sigma} f(x) dx = 0,683$ soit 68,3%
- dans l'intervalle $[\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]$ est tel que : $\int_{\mu - 2\sigma}^{\mu + 2\sigma} f(x) dx = 0,954$ soit 95,4%
- dans l'intervalle $[\mu - 3\sigma ; \mu + 3\sigma]$, est tel que : $\int_{\mu - 3\sigma}^{\mu + 3\sigma} f(x) dx = 0,997$ soit 99,7%

Pour une distribution de Gauss, la probabilité de trouver x en dehors de l'intervalle $[\mu - \sigma ; \mu + \sigma]$ est égale à 1/3, c'est-à-dire très importante ! Autrement dit, si l'on mesure une grandeur x plusieurs fois, environ 1/3 des résultats se trouve en dehors de $\mu \pm \sigma$ et seulement 2/3 dans l'intervalle. De ce point de vue, il n'y a rien de dramatique si le résultat sort de cet intervalle. Par contre, s'il se trouve aussi en dehors de l'intervalle $[\mu - 3\sigma ; \mu + 3\sigma]$, la situation devient beaucoup plus préoccupante. La probabilité d'un tel événement pour la distribution de Gauss est seulement de 0,3%.



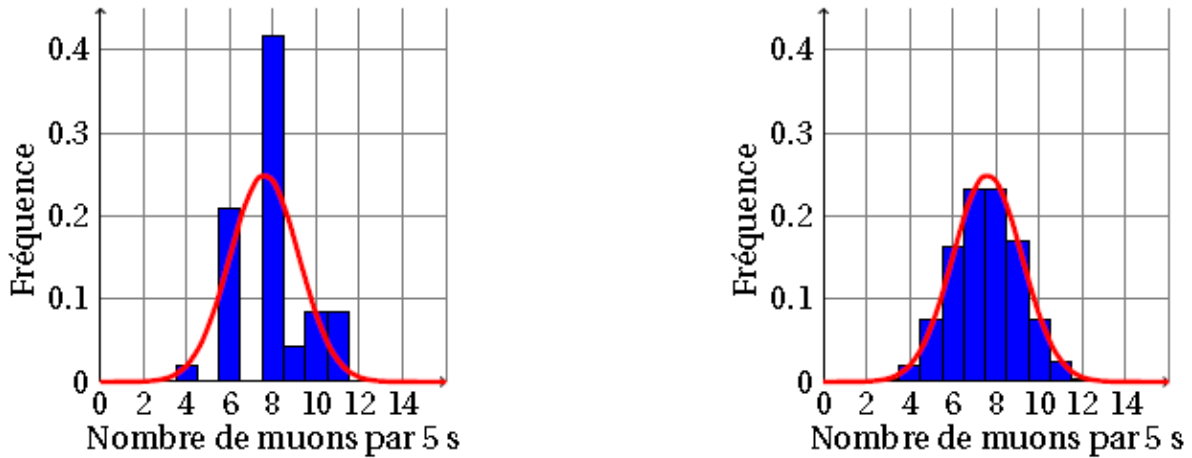
Distribution de Gauss et probabilité

(H) Échantillonnage et meilleure estimation

L'observation de la Nature ne peut nous donner que des valeurs en nombre limité. Toutes les méthodes de la statistique inférentielle reposent sur des échantillons. Le but est d'inférer à partir d'échantillons des caractéristiques de la population dans son ensemble, et de quantifier la certitude qu'on peut tenir de ces informations. On a N réalisations d'une variable aléatoire x .

Ainsi, on a vu précédemment que l'on pouvait écrire le résultat de notre mesure conventionnellement à l'aide des fonctions de distributions gaussienne. Seulement, la distribution gaussienne est un cas limite qui nécessite une infinité d'expériences ce qui est bien entendu impossible à réaliser. En général lors d'une expérience, il est difficile de connaître la distribution de la valeur physique mesurée x et ainsi de déterminer l'espérance mathématique de la distribution μ et son écart-type σ . La seule information dont nous disposons est un ensemble de résultats, c'est-à-dire le nombre fini de mesures $\{x_i\} = x_1, x_2, \dots, x_N$. A partir de ces mesures nous tentons de construire des valeurs qui tiendront lieu d'espérance mathématique μ et d'écart-type σ . Il va donc être nécessaire d'utiliser les statistiques pour pouvoir estimer à la fois la valeur moyenne μ et l'écart-type σ . Pour cela, par analogie avec les définitions théoriques, nous introduisons la valeur moyenne et l'écart-type expérimentales. Les estimateurs sont donc des indicateurs qui résument à eux seuls certaines

caractéristiques de la loi. On constate aussi que, plus on a de mesures, plus on tend vers la distribution limite. On a représenté ci-dessous la probabilité de comptage réelle et la probabilité suivant une loi Gaussienne pour les comptages de 2 min et 333 min.



Evolution de l'ajustement de la gaussienne en fonction du nombre de comptages.

Population ou échantillon

Il existe une différence entre les modèles et les observations. Dans le premier cas, et pour autant que la loi de probabilité soit connue, on parlera de population. Les quantités qui seront déduites, telles que l'espérance, sont théoriques et en ce sens dépourvues d'erreur. Il est rare de pouvoir travailler sur une population sauf si on dispose d'un modèle mathématique exact du phénomène étudié (jeu de dé).

Lorsque la loi de probabilité n'est pas connue, alors il faut réaliser une expérience pour estimer les propriétés telles que la moyenne. On parlera alors d'échantillon. Les valeurs obtenues seront d'autant plus proches des valeurs théoriques que l'expérience a été bien menée. En vertu de la loi des grands nombres, les valeurs obtenues avec l'échantillon convergent vers celle de la population lorsque la taille de l'échantillon augmente. Tout le problème consiste à estimer au mieux ces valeurs.

Propriétés d'un estimateur

Un bon estimateur doit satisfaire à la fois à trois conditions souvent contradictoires : il doit être cohérent, non biaisé et efficace. On appellera dans ce paragraphe, X_0^* estimateur de la variable aléatoire X_0 recherchée (par exemple la moyenne).

Cohérence d'un estimateur

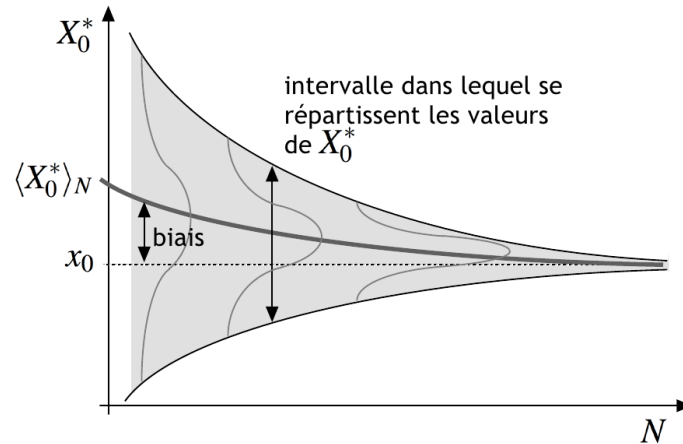
La loi des grands nombres nous dit que qu'en moyennant le résultat d'une expérience un grand nombre N de fois, l'estimateur (noté X_0^*) ainsi obtenu tend vers une variable non aléatoire x_0 qui est la valeur numérique recherchée. C'est la propriété de cohérence.

Biais d'un estimateur

Lorsque la taille N d'un échantillon tend vers l'infini, un estimateur cohérent tend vers la valeur exacte x_0 recherchée. Mais dans le cas réel où l'échantillon est de taille finie, on aimerait que l'espérance de l'estimateur (que l'on note $\langle X_0^* \rangle$) s'écarte le moins possible de la valeur x_0 . Cet écart est appelé biais. Pour un estimateur biaisé, on a :

$$\langle X_0^* \rangle = x_0 + b_N$$

où b_N est le biais de l'échantillon. Pour un estimateur cohérent, $\lim_{N \rightarrow \infty} b_N = 0$. L'estimateur de la figure ci-dessous est biaisé.

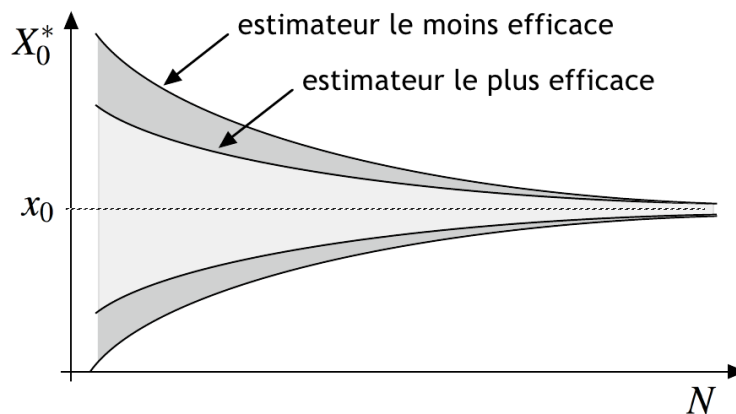


Exemple d'un estimateur cohérent et biaisé. D'après T. Dudok de Wit, Université d'Orléans

Efficacité d'un estimateur

Parmi différents estimateurs de la même quantité, on choisira celui dont l'écart-type est minimal : la convergence vers la valeur exacte n'en sera que plus rapide.

Exemple : pour estimer la moyenne d'un échantillon $\{x_i\}$, on effectue habituellement la moyenne arithmétique sur toutes les valeurs. On peut aussi effectuer la moyenne de la valeur minimum et de la valeur maximum. Cependant, l'écart-type de la moyenne arithmétique est bien plus petit que celle de la moyenne du minimum/maximum.



Deux estimateurs d'efficacité différente. D'après T. Dudok de Wit, Université d'Orléans.

Meilleure estimation d'une espérance mathématique

La meilleure estimation de l'espérance mathématique μ que l'on peut faire à l'aide d'un tableur (Excel, LibreOffice ou autre) est la moyenne expérimentale (ou arithmétique) que l'on notera \bar{x} et qui s'effectue sur un nombre fini de mesures.

On considère que N événements indépendants⁵³ (notre nombre de comptages de 5 s) d'une variable aléatoire x (nombre de muons détectés en 5 s) sont mesurés. On a alors :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Cette valeur est appelée valeur moyenne estimée à partir d'un échantillon ou valeur moyenne expérimentale.

Exemple : on réalise des nombres N différents de lancer de dé, on obtient alors les moyennes

N	10	100	1000	10000	100000
\bar{x}	3,2	3,56	3,486	3,5366	3,5010

Ces valeurs convergent bien vers l'espérance mathématique $\mu = \frac{7}{2}$ lorsque N tend vers l'infini. De plus, on constate que notre estimateur est bien cohérent et non biaisé

Evolution de la valeur moyenne en fonction du nombre d'expériences

On a tracé la variation de la moyenne en fonction du nombre d'expériences réalisées avec le cosmodétecteur. On obtient les résultats suivants :



Variation de la moyenne sur 500 expériences

On constate que les variations de la moyenne sont très importantes lorsqu'il y a peu d'expériences mais que celle-ci converge vers une valeur limite et ne fluctue quasiment plus après 400 expériences. On a bien ici un estimateur cohérent et non biaisé.

Meilleure estimation de la variance (ou du carré de l'écart-type)

La variance expérimentale s^2 est définie, par analogie avec la valeur moyenne, de la façon suivante:

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

L'écart-type caractérise, en quelque sorte, l'incertitude* moyenne pour les mesures x_1, x_2, \dots, x_N prises séparément⁵⁴.

⁵³ Ce qui est notre cas ici car le nombre de muons incidents est aléatoire.

⁵⁴ Le facteur $N-1$, et non pas N , vient du fait que la formule ci-dessus utilise \bar{x} , seule quantité accessible à l'expérience, et non pas X_{vrai} . Il est aisé de s'en souvenir : on conçoit bien qu'il n'est pas possible d'estimer l'écart-type d'une distribution à partir d'une seule mesure.

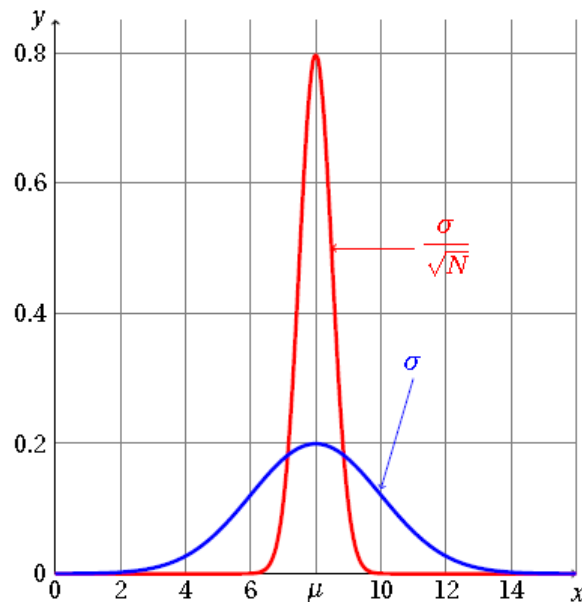
Ecart-type de la moyenne

L'écart-type ne décroît pas lorsque l'on augmente le nombre de mesures : malgré la présence du facteur $N-1$, il faut prendre en compte l'écart à la moyenne qu'une mesure supplémentaire ajoute. Notre meilleure estimation \bar{x} de la moyenne est une combinaison de ces N mesures et on a toutes les raisons de penser que cette estimation de la moyenne est plus meilleure (c'est-à-dire plus proche de l'espérance μ) lorsque l'on a beaucoup de mesures que lorsque l'on en a qu'une seule. Il en est de même pour l'écart-type, on devrait accéder à une diminution de l'erreur lorsque l'on augmente le nombre de mesures.

En répétant de nombreuses fois l'expérience consistant à mesurer N valeurs de la grandeur X dont on prend ensuite la valeur moyenne, on obtient la distribution de probabilité de \bar{x} . Dans ce cas, \bar{x} peut être aussi associée à une variable aléatoire, elle-même associée à une fonction de distribution gaussienne d'espérance mathématique μ et d'écart-type $\sigma_{\bar{x}}$ appelé écart-type de la moyenne. En effet, la moyenne est donnée par $\bar{x}_N = \frac{x_1+x_2+\dots+x_N}{N}$: les grandeurs x_i étant des variables aléatoires, il en est de même de \bar{x}_N . Les variables aléatoires sont indépendantes et le théorème des variances conduit à $\sigma_{\bar{x}_N}^2 = \frac{\sigma^2}{N}$. L'écart-type de la moyenne vaut alors :

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

$\sigma_{\bar{x}}$ représente l'incertitude sur la détermination de la valeur vraie X_{vrai} (forcément inconnue qui correspond ici à μ) partir de la moyenne de N mesures. Cette détermination est donc \sqrt{N} fois plus précise que celle obtenue à partir d'une mesure unique. Dans la pratique, \sqrt{N} croît lentement et améliorer la précision d'un facteur 10 oblige à effectuer 100 fois plus de mesures.



Ecart-type et écart-type de la moyenne.

Comme on peut le voir sur le graphique ci-dessus, lorsqu'on effectue une mesure unique, la valeur trouvée suit la distribution de probabilité représentée en pointillés. N mesures indépendantes se répartissent aléatoirement sur cette courbe. Lorsqu'on prend la valeur

moyenne de ces N mesures, les écarts à la valeur vraie se compensent statistiquement, avec d'autant plus d'efficacité que N est grand. Si on réalise plusieurs déterminations de la moyenne de N mesures, elles suivent la distribution en trait plein.

Or, on ne connaît jamais σ , on ne peut avoir que son meilleur estimateur s , on a alors la meilleure estimation de l'écart-type de la moyenne \bar{s} donnée par :

$$s_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \frac{s^2}{N}$$

(I) Résultat d'une mesure

Incertitude

L'incertitude Δx traduit les tentatives scientifiques pour estimer l'importance de l'erreur aléatoire commise. Si Δx est évalué statistiquement (ce que l'on fera dans la suite de l'exposé), on cherche dans ce cas à caractériser la distribution de probabilité des valeurs de x . En l'absence d'erreur systématique, l'estimation de la valeur moyenne est la meilleure estimation de la valeur vraie X_{vrai} tandis que l'incertitude Δx , directement reliée à l'estimation de l'écart-type de la distribution, définit un intervalle dans lequel la valeur vraie X_{vrai} se trouve avec un niveau de confiance connu. On choisit le plus souvent comme incertitude l'estimation de l'écart-type de la distribution. On parle alors d'incertitude-type*.

Présentation d'un résultat de mesure

Ainsi lorsque l'on se base sur N mesures x_1, x_2, \dots, x_N , on peut écrire notre réponse finale pour la détermination de la valeur de X_{vrai} :

$$x_{\text{exp}} = \bar{x} \pm \Delta x$$

où $x_{\text{exp}} = \bar{x}$ est la moyenne de x_1, x_2, \dots, x_N et Δx correspond à l'écart-type de la moyenne⁵⁵,

$$\Delta x = \sqrt{s_{\bar{x}}^2} = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

avec t le coefficient d'élargissement. Ainsi, dans le cas où la distribution des valeurs de nos mesures est gaussienne, pour $t=1$, on a un à un niveau de confiance de 63,8%, pour $t=2$, on a un niveau de confiance de 95,4% et pour $t=3$, on a un niveau intervalle de confiance de 99,7%⁵⁶.

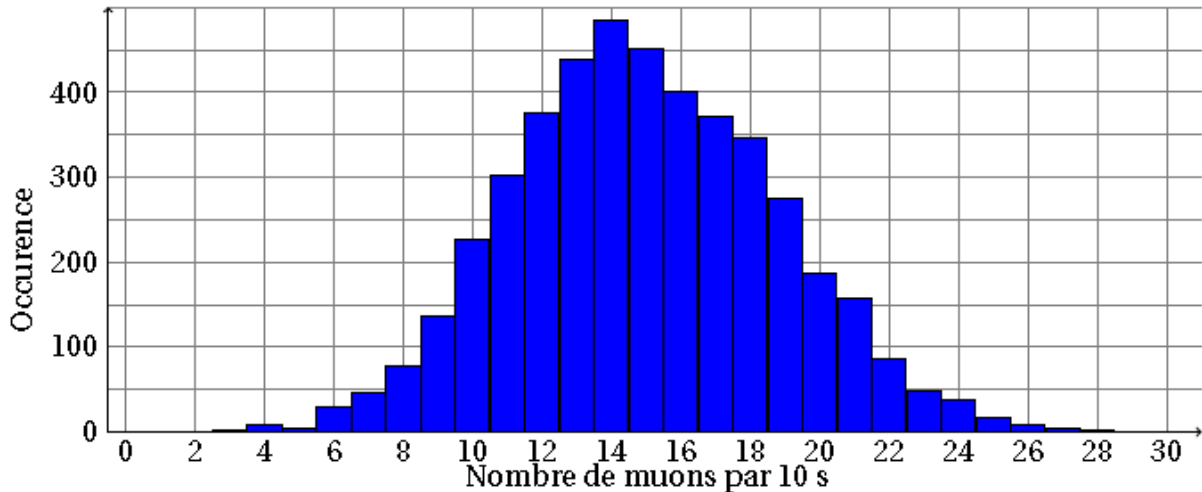
(J) Retour sur la première expérience

Analyse à partir de la seconde courbe représentant les mesures de la partie ii

On s'intéresse à la moyenne et à l'écart-type selon cette représentation des résultats.

⁵⁵ Lorsque le nombre de mesures tend vers l'infini, l'écart-type de la moyenne tend vers zéro ce qui est tout à fait normal puisque dans ce cas, il n'y a plus aucun doute sur la valeur de la moyenne \bar{X} qui correspond alors à X .

⁵⁶ L'intervalle de confiance associé à l'écart-type dépend de la distribution (gaussienne, poissonnienne, binomiale,...) vers laquelle tendant les mesures expérimentales.



Histogramme représentant le nombre de comptage k_i en fonction du nombre de muons x_i détectés par intervalle de 10 s.

Lorsque l'on fait les calculs, on obtient une moyenne de 14,971523 muons⁵⁷ pour 10 secondes. On a alors $\bar{x} = 1,4971523$ muons par seconde. L'estimation de l'écart-type pour 10 s est 3,827286, soit $s_x = 0,3827286$ muons par seconde pour l'estimation de l'écart-type pour 1 s. On en déduit alors que l'estimation de l'écart-type de la moyenne est $s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}} = \frac{0,3827286}{\sqrt{4530}} = 0,00568645 \dots$ muons par seconde.

On peut alors écrire le résultat sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} x_{exp} &= 1,4971 \pm 0,0057 \text{ muons par seconde (68,3\%)} \\ x_{exp} &= 1,497 \pm 0,011 \text{ muons par seconde (95,4\%)} \\ x_{exp} &= 1,497 \pm 0,017 \text{ muons par seconde (99,7\%)} \end{aligned}$$

On a donc bien un résultat expérimental avec un niveau de confiance donné.

Analyse à partir de la troisième représentation des mesures de la partie ii

On a 67 821 muons détectés pendant 13 h (plus précisément $9060 \times 5 \text{ s} = 45\,300 \text{ s}$). On peut donc en déduire que le nombre moyen de muons détectés par seconde est $\bar{x} = \frac{67\,821}{45\,300} = 1,4971523$ muons par seconde. On démontre que l'estimation de l'écart-type dans le cas d'un comptage est \sqrt{k} dans notre cas, on a 260,424653 pour le comptage de 45 300 s soit, si l'on ramène ce résultat à 1 s, on obtient $s = 0,0057488$ muons par seconde.

On écrit alors le résultat sous la forme suivante :

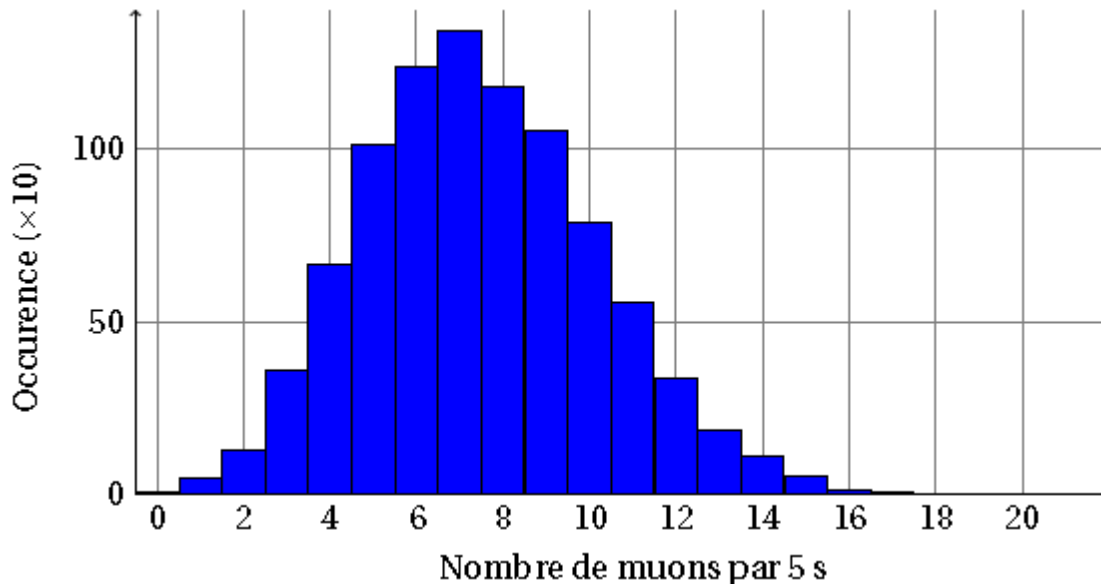
$$x_{exp} = 1,497 \pm 0,011 \text{ muons par seconde}$$

⁵⁷ A ce stade, on ne se préoccupe pas des chiffres significatifs, cela est trop tôt et pourrait altérer nos résultats .

mais il est difficile d'attribuer un niveau de confiance dans un cas non gaussien⁵⁸. On prend alors par convention un coefficient d'élargissement t de 2.

Analyse à partir de la première courbe représentant les mesures de la partie ii

On s'intéresse à la moyenne et à l'écart-type selon cette représentation des résultats.



Histogramme représentant le nombre de comptage k_i en fonction du nombre de muons x_i détectés par intervalle de 5 s

On obtient une moyenne de 7,48576159 muons par intervalle de 5 s. On en déduit $\bar{x} = 1,4971523$ muons par seconde. L'estimation de l'écart-type pour 5 s est 2,7241173 donc $s = 0,5448235$ muons par seconde. Or on s'intéresse à l'estimation de l'écart-type de la moyenne soit $s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{N}} = \frac{0,5448235}{\sqrt{9060}} = 0,0057239$ muons par seconde.

On écrit alors le résultat sous la forme suivante :

$$x_{exp} = 1,497 \pm 0,011 \text{ muons par seconde}$$

De la même manière que précédemment, il est difficile de calculer le niveau de confiance pour une poissonnienne⁵⁹ et cela dépasse le cadre de ce document introductif.

⁵⁸ Pour notre expérience, on est dans le cas où la distribution binomiale est quasiment une distribution gaussienne, il ne serait pas illogique d'écrire le résultat de la même façon que dans le paragraphe précédent.

⁵⁹ On remarquera tout de même que cet échantillon de valeur n n'est pas très éloigné d'une gaussienne.

Bibliographie

- J.R. Taylor, *An Introduction to Error Analysis*, 2nd edition, University Science Books Sausalito, California, 1997;
- K. Protassov, *Probabilités et incertitudes dans l'analyse des données expérimentales*, Presses Universitaires de Grenoble, 1999;
- Philip R. Bevington & D. Keith Robinson, *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*, McGraw-Hill Education, 2003 ;
- Johann Collot, *Erreur, probabilité statistique*, Polycopié du cours de physique expérimentale des hautes énergies du DEA de Physique Théorique Rhône-Alpin, <http://isnwww.in2p3.fr/atlas/cours/index.html>, 2001 ;
- F.-X. Bally & J.-M. Berroir, *Incertitudes expérimentales*, Polycopié de cours du centre de préparation interuniversitaire à l'agrégation de physique de Montrouge, <http://poisson.ens.fr/Ressources/incertitudes.pdf>, 2008.

b. Traitement de données expérimentales

i. Tracé d'une courbe modélisant les données expérimentales : ajustement d'un modèle

On dispose de N couples de mesures (X_i, Y_i) . On se propose d'ajuster un modèle f à q paramètres ajustables qui puissent expliquer la variable Y (variable expliquée) en fonction des valeurs de X (variable explicative).

$Y_i = f_P(X_i)$ et $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_q \end{pmatrix}$ avec p_1, \dots, p_q l'ensemble des paramètres de notre modèle à ajuster.

On considère un modèle f fixé et on ne joue qu'avec la valeur des paramètres. Pour répondre aux questions sur la qualité de l'ajustement, la première démarche à entreprendre est de définir une fonction « coût » ou « critère d'ajustement » qui mesurera cette qualité. L'obtention des meilleurs paramètres revient donc à rechercher le minimum de ce critère en faisant varier les paramètres.

Deux méthodes classiques, utilisant des mesures différentes de la qualité de l'ajustement sont couramment utilisés : le critère du χ^2 et le critère des moindres carrés.

ii. Utilisation du critère du χ^2

(A) Application à la distribution angulaire du flux de muons

Définition du critère du χ^2

Le critère est construit à partir de la somme des carrés des écarts relatif au modèle ramenés au nombre de degré de liberté du système⁶⁰.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(f(X_i) - Y_i)^2}{\sigma_i(Y_i)^2}$$

avec n , le nombre de points expérimentaux ; q , le nombre de paramètre du modèle ; $f(X_i)$, la valeur donnée par le modèle pour X_i ; Y_i , la valeur expérimentale de rang i et $\sigma_i(Y_i)$ l'incertitude type estimé pour Y_i ⁶¹. En toute rigueur, l'incertitude type $\sigma_i(Y_i)$ doit être issue d'une distribution gaussienne. Nous avons vu précédemment (estimation des fluctuations de comptage) que lorsque $k = np$ est assez grand, la distribution binomiale des fluctuations de comptage tend vers une distribution gaussienne. On considérera dans la suite que cette condition est toujours vérifiée. On prendra alors $\sigma_i(Y_i) = \sqrt{Y_i}$. Dans notre cas, le critère du χ^2 est donc :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(f(X_i) - Y_i)^2}{Y_i}$$

⁶⁰ Correspond au nombre de points expérimentaux moins le nombre de paramètre du modèle.

⁶¹ On considère que l'erreur sur X_i est négligeable par rapport à celle de Y_i

χ^2 correspond à une statistique qui caractérise la dispersion des valeurs mesurées par rapport aux valeurs données par le modèle. Si les mesures sont en parfait accord avec les valeurs du modèle alors on a $\chi^2=0$. Ce cas est totalement improbable.

Dans notre relation du χ^2 , le numérateur représente une mesure de la dispersion des mesures par rapport au modèle mais le dénominateur donne une mesure de la dispersion attendue. On peut alors conclure que l'on a un bon accord entre nos mesures et le modèle prédit lorsque la moyenne des dispersions des mesures correspond à la moyenne des dispersions attendue. Ainsi, on devrait obtenir une contribution telle que, pour chaque mesure, $(f(X_i) - Y_i)^2 = \sigma_i(Y_i)^2$ soit une contribution de 1 pour chaque mesure. Dans ce cas, $\chi^2=n$. Cela est presque correct. En fait, la vraie valeur attendue de χ^2 est : $\chi^2 = \nu = n - q$ où ν est le nombre de degré de libertés et q le nombre de paramètre de notre modèle. On utilise alors de χ_r^2 appelé χ^2 réduit défini par :

$$\chi_r^2 = \frac{\chi^2}{\nu} = \frac{1}{n - q} \sum_{i=1}^n \frac{(f(X_i) - Y_i)^2}{Y_i}$$

Notre modèle sera en bonne adéquation lorsque χ_r^2 est proche de 1.

(B) Application à la distribution angulaire du flux de muons.

Explicitation du modèle

Pour la distribution angulaire du muon, le modèle utilisé est le suivant :

$$N(\theta) = a \cdot \cos^2(\theta_i) + b$$

avec $N(\theta)$ le nombre de muons reçu par l'appareil pour un angle θ ; θ , l'angle sous lequel est incliné la roue (voir expérience distribution angulaire du flux de muons) et a et b deux paramètres à déterminer.

On a donc ici deux paramètres à déterminer, ce sont a et b donc $q = 2$. On va donc minimiser χ^2 suivant :

$$\chi_r^2 = \frac{1}{n - q} \sum_{i=1}^n \frac{(a \cdot \cos^2(\theta_i) + b - N_{exp}(\theta_i))^2}{N_{exp}(\theta_i)}$$

avec $N_{exp}(\theta_i)$, le nombre de muons mesurés pour un angle θ_i .

Utilisation d'un tableur pour minimiser χ_r^2

On va utiliser un tableur pour minimiser χ_r^2 mais il est tout à fait possible d'utiliser un logiciel de calcul numérique (Scilab, Matlab ou Octave, par exemple) pour réaliser ce travail. On utilisera l'outil solveur disponible sur LibreOffice Calc et sur Microsoft Excel. Cet outil, par ajustements successifs des paramètres, va nous permet de minimiser la fonction χ_r^2 .

Voici comment se présente un fichier LibreOffice Calc avant optimisation par le solveur :

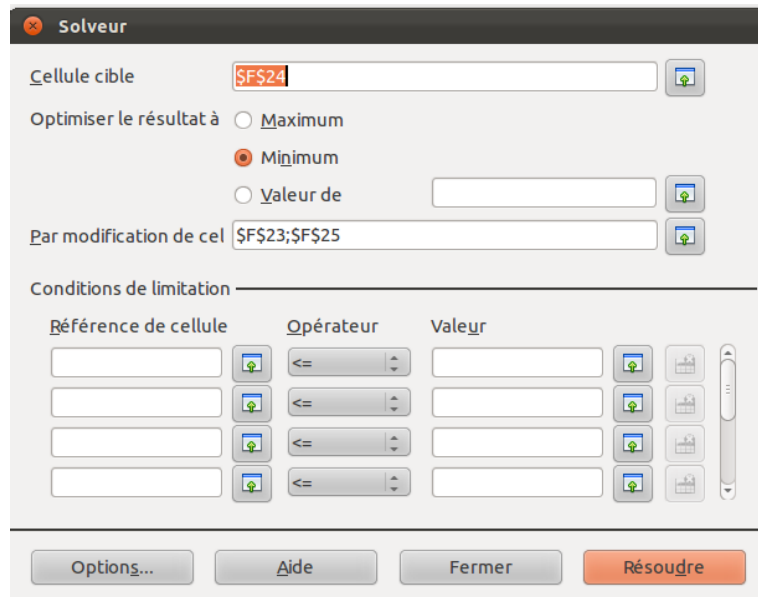
	A	B	C	D	E	F
1	Angle (rad)	Angle (°)	comptage N	racine N	modèle	différence
2	-1,57	-90	50	7,1	40,000	0,125000000
3	-1,40	-80	48	6,9	52,061	0,021473903
4	-1,22	-70	79	8,9	86,790	0,048014218
5	-1,05	-60	156	12,5	139,999	0,102574978
6	-0,87	-50	217	14,7	205,270	0,039632261
7	-0,70	-40	280	16,7	274,729	0,006201679
8	-0,52	-30	320	17,9	340,000	0,078121686
9	-0,35	-20	401	20,0	393,209	0,009461454
10	-0,17	-10	457	21,4	427,938	0,115505009
11	0,00	0	485	22,0	440,000	0,260953608
12	0,17	10	485	22,0	427,938	0,419590000
13	0,35	20	471	21,7	393,209	0,803010836
14	0,52	30	382	19,5	340,000	0,288618395
15	0,70	40	299	17,3	274,729	0,123135829
16	0,87	50	206	14,4	205,270	0,000161876
17	1,05	60	160	12,6	139,999	0,156263255
18	1,22	70	112	10,6	86,790	0,354645704
19	1,40	80	52	7,2	52,061	0,000004477
20	1,57	90	45	6,7	40,000	0,034722222
21						
22						
23					a=	400
24					chi=	2,9870913883
25					b=	40

Dans notre cas, on a n=19 valeurs expérimentales.

La colonne E correspond au modèle $N(\theta) = a \cdot \cos^2(\theta) + b$, on est alors obligé de fixer *a priori* une valeur pour a et b (case F23 et F25)⁶². Le solveur partira de ces deux valeurs et des paramètres pour minimiser χ_r^2 (case F24).

La colonne F correspond à $E_i = \frac{1}{17} \frac{(a \cdot \cos^2(\theta_i) + b - N_{exp}(\theta_i))^2}{N_{exp}(\theta_i)}$ c'est à dire la contribution d'un point expérimental au χ_r^2 .

On utilise ensuite la fonction solveur⁶³. La fenêtre suivante apparaît :



La cellule cible correspond à la cellule que vous désirez optimiser. On a alors le choix de minimiser cette cellule, de la maximiser ou alors de faire tendre la cellule vers une valeur

62 On essaie de donner une valeur pas trop éloigné pour minimiser le temps de calcul.

63 Pour LibreOffice Calc, on va dans outils puis solveur.

particulière. Dans notre cas, il s'agit de minimiser χ_r^2 qui correspond dans notre exemple à la cellule F24.

Ensuite, il faut renseigner le tableur sur les cellules qu'il peut modifier pour pouvoir obtenir l'optimisation attendue qui correspond à la case *Par modification de cel.* Dans notre cas, le tableur devra modifier deux valeurs, a et b qui se trouvent respectivement dans les case F23 et F25.

Il reste plus ensuite qu'à demander au logiciel d'effectuer le calcul en appuyant sur le bouton résoudre. Après quelques instants, le calcul est effectué et de nouvelles valeurs (désormais optimisées) sont données dans les case F23 et F25.

Voici la feuille de calcul après optimisation :

	A	B	C	D	E	F
1	Angle (rad)	Angle (°)	comptage N	racine N	modèle	différence
2	-1,57	-90	50	7,1	42,287	0,074372093
3	-1,40	-80	48	6,9	55,271	0,068834914
4	-1,22	-70	79	8,9	92,659	0,147596783
5	-1,05	-60	156	12,5	149,941	0,014709218
6	-0,87	-50	217	14,7	220,208	0,002963592
7	-0,70	-40	280	16,7	294,984	0,050118825
8	-0,52	-30	320	17,9	365,252	0,399942043
9	-0,35	-20	401	20,0	422,534	0,072273831
10	-0,17	-10	457	21,4	459,922	0,001167931
11	0,00	0	485	22,0	472,907	0,018844903
12	0,17	10	485	22,0	459,922	0,081042579
13	0,35	20	471	21,7	422,534	0,311698876
14	0,52	30	382	19,5	365,252	0,045895026
15	0,70	40	299	17,3	294,984	0,003370614
16	0,87	50	206	14,4	220,208	0,061243889
17	1,05	60	160	12,6	149,941	0,039526565
18	1,22	70	112	10,6	92,659	0,208751508
19	1,40	80	52	7,2	55,271	0,012858701
20	1,57	90	45	6,7	42,287	0,010226304
21						
22						
23				a=		430,620647415
24				chi=		1,6254381970
25				b=		42,2865264112

En observant la valeur χ_r^2 , on constate dans notre cas qu'elle est assez proche de 1 cela veut dire qu'il y a de grandes chances que notre modèle « tienne la route ». Dans le cas où χ_r^2 est assez élevé (ou très proche de 0), il sera peut-être judicieux de réfléchir soit à la qualité des mesures soit à la pertinence du modèle.

On peut alors écrire que :

$$N(\theta) = 430,6 \cdot \cos^2(\theta) + 42,28$$

(C) Application au temps de vie du muon

Explicitation du modèle

Pour le temps de vie du muon, nous avons affaire à une décroissance exponentielle plus une constante due au bruit, le modèle utilisé est le suivant :

$$N(t) = A \cdot \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) + B$$

avec $N(t)$ le nombre de muons restant au temps t ; τ , le temps de vie du muon et A et B deux paramètres à déterminer.

On a donc ici trois paramètres à déterminer, ce sont A , B et τ donc $q=3$. On va donc minimiser χ^2 suivant :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\left(A \cdot \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) + B - N_{\text{exp}}(t) \right)^2}{N_{\text{exp}}(t)}$$

avec $N_{\text{exp}}(t)$, le nombre de muons au temps t .

Dans le tableur, on crée une colonne donnant $N(t)$ ⁶⁴ (le nombre de muon au temps t) et une colonne dt (pas temporel) comme indiqué ci-dessous :

E	F	G	H
		A=	155,7542574
		B=	10,11376396
		tau=	2131,836093
		khi2=	188,663379
dt	N	modèle	différence
0	0	165,8680213	
400	324	139,2215758	105,38
800	110	117,1338054	0,46
1200	123	98,82481181	4,75
1600	88	83,64812166	0,22
2000	64	71,06786037	0,78
2400	58	60,63983075	0,12
2800	54	51,99582892	0,07
3200	41	44,83064332	0,36
3600	35	38,891278	0,43
4000	32	33,96801958	0,12
4400	29	29,88703243	0,03
4800	23	26,50422075	0,53
5200	22	23,70014065	0,13
5600	28	21,3757827	1,57
6000	20	19,44907602	0,02
6400	17	17,8519904	0,04

Enfin, on utilise la fonction solveur de notre tableur en faisant varier les paramètres A , B et τ . On trouve alors dans notre cas $\tau=2,1 \mu\text{s}$ (la valeur du PDG est $\tau=2,2 \mu\text{s}$)⁶⁵.

Remarques :

- Pour minimiser χ^2 , il faut faire attention de pas prendre en compte le nombre $N(t)$ pour $t < 100 \text{ ns}$ car ces signaux sont très bruités⁶⁶ (ici, par sécurité⁶⁷, nous avons occulté tous les désintégrations de muons dont le temps de désintégration est inférieur à 400 ns).
- Le choix du pas temporel (ici 400 ns) est un des critères les plus sensibles. Son choix doit être fait avec précaution : si le pas est trop petit, la fluctuation du comptage est trop importante ; s'il est trop important, le nombre de points de mesures devient trop restreint.
- Si l'on ramène notre χ^2 au χ^2_r sachant que l'on a 129 mesures et 3 paramètres donc :

⁶⁴ $N(t)$ a été obtenu grâce à la fonction fréquence de Excel ou LibreOffice.

⁶⁵ Nous ne ferons pas d'estimation de l'erreur sur cette mesure car celle-ci est assez complexe à estimer. Pour plus d'information voir l'ouvrage de P.R. Bevington

⁶⁶ Ce bruit peut être dû à des échos du signal primaire dans le PM

⁶⁷ On pourra vérifier l'influence de ce choix.

$$\chi_r^2 = \frac{\chi^2}{n - q} = \frac{189}{129 - 1 - 3} = 1,5$$

iii. Utilisation de la méthode des moindres carrés : application au temps de vie du muon

Lorsque l'on trace la courbe $N(t)=f(t)$, le modèle utilisé est : $N^{modele}(t) = N_0 \cdot \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) + B$ avec N_0 , le nombre de muons à $t=0$ s et B correspondant au bruit de fond.

Pour utiliser la méthode des moindres carrés, nous devons linéariser cette équation. Pour cela, il faut estimer le bruit B (celui-ci correspond à la moyenne des comptages à des temps élevés car on estime que lorsque t est élevé, on n'a plus de muons mais uniquement du bruit de fond), on a donc une nouvelle valeur $N^{sans\ bruit}$.

Le modèle sans le bruit est donc $N^{modele\ sans\ bruit}(t) = A \cdot \exp\left(\frac{t}{\tau}\right)$. Si on linéarise cette équation, on a :

$$N^{modele\ sans\ bruit} = \ln N_0 - \frac{t}{\tau}$$

De la même manière que pour le χ^2 , il faut minimiser la somme suivante :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(f(X_i) - Y_i)^2}{\sigma_i(Y_i)^2}$$

Ici $f(X_i)$ correspond à $N^{modele\ sans\ bruit}$, Y_i correspond à $N_i^{sans\ bruit}$ et $\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{N_i^{sans\ bruit}}}$.

Ainsi, cela revient à minimiser :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(\ln N_0 - \frac{t_i}{\tau} - N_i^{sans\ bruit})^2}{\sigma_i^2}$$

où t_i est le temps correspondant au comptage $N_i^{sans\ bruit}$.

Nous devons alors ajuster deux paramètres, $\ln N_0$ et τ . Pour cela, on doit minimiser cette expression et pour cela on dérive cette expression par rapport à chacun des paramètres que l'on doit ajuster. On a alors :

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial \ln N_0} = 0$$

et

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial \frac{1}{\tau}} = 0$$

Après calcul, on obtient :

$$\ln N_0 = \frac{1}{\Delta} \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{\ln N_i^{sans\ bruit}}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{t_i^2}{\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^N \frac{\ln N_i^{sans\ bruit} \cdot t_i}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{t_i}{\sigma_i^2} \right\}$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\Delta} \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{\ln N_i^{sans\ bruit} \cdot t_i}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^N \frac{\ln N_i^{sans\ bruit}}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{t_i}{\sigma_i^2} \right\}$$

avec

$$\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{t_i^2}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} - \left(\sum_{i=1}^N \frac{t_i}{\sigma_i^2} \right)^2$$

L'incertitude $\Delta\tau$ est donnée par l'écart-type σ_τ telle que :

$$\Delta\tau = -\tau^2 \cdot \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}$$

En utilisant les mêmes données que pour le χ^2 , on a la feuille Excel suivante :

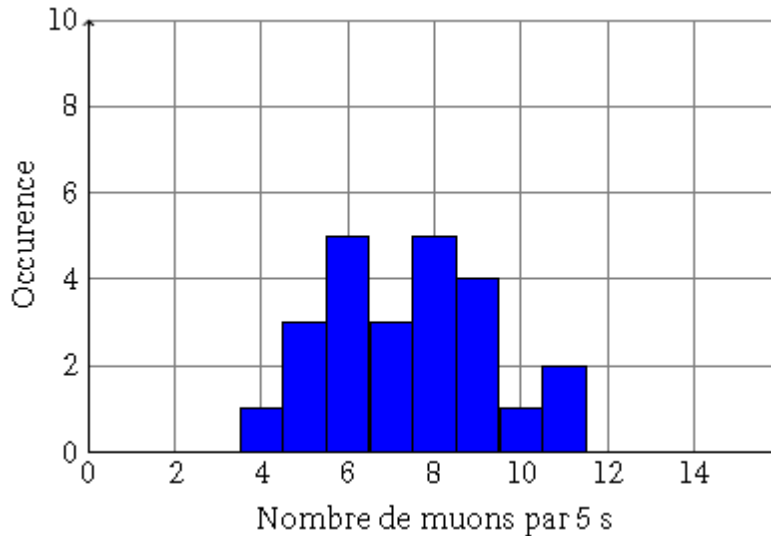
	A	B	C	D	E
1				N_Bruit=	10,11
2				ln N0=	5,048
3				1/tau=	-0,00046
4				tau=	2197
5				Delta 1/tau=	0,00002454
6				Delta tau=	118
7	HT PM2:0V				
8	Seuil PM2: 40mV				
9					
10	VIE DU MUON 1 (ns)	dt	N	N-N_Bruit	ln(N-N_Bruit)
11	488	0	0		
12	28688	400	324	313,9	5,75
13	6160	800	110	99,9	4,60
14	1072	1200	123	112,9	4,73
15	31320	1600	88	77,9	4,36
16	816	2000	64	53,9	3,99
17	1720	2400	58	47,9	3,87
18	12000	2800	54	43,9	3,78
19	26808	3200	41	30,9	3,43
20	61328	3600	35	24,9	3,21
21	1064	4000	32	21,9	3,09
22	41424	4400	29	18,9	2,94

On a donc un temps de vie $\tau=2,19\pm 0,12 \mu\text{s}$ (à 68,3% en degré de confiance). Cette mesure est donc compatible par rapport à celle obtenue par la méthode du χ^2 .

Remarques :

- Cette méthode présente l'avantage d'une estimation de l'erreur sur le temps de vie du muon.
- On prendra garde à l'évaluation du bruit de fond : une mauvaise évaluation de celui-ci peut entraîner de grands écarts sur l'estimation du temps de vie.
- D'un point de vue de l'évaluation du temps de vie, les deux méthodes sont équivalentes. Une valeur plus proche de la valeur théorique attendue de l'une des deux méthodes ne signifie pas que cette méthode est meilleure : une erreur systématique de nos mesures peut faire que la meilleure estimation de la valeur vraie par nos mesures est une valeur quelconque autour de la valeur théorique attendue.

ANNEXE

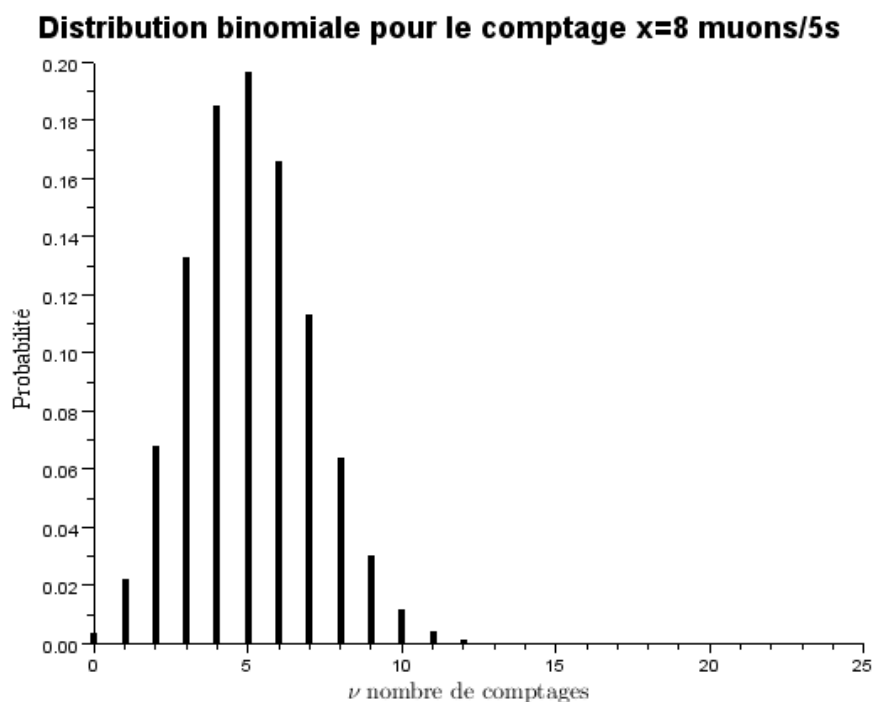
Meilleure estimation de comptage (fluctuation statistique de comptage d'une valeur x_i)**Fluctuations statistiques de comptage**

On considère un comptage de 2 minutes effectué, le nombre de fois k où le cosmodétecteur a compté $x=8$ muons/5s est $k=5$. La fréquence de ce résultat est 0,21. On a effectué un nombre $N=24$.

On considère que les fluctuations statistiques pour la valeur $x=8$ suit la loi de distribution binomiale suivante donnant la probabilité d'obtenir un comptage ν :

$$P_B(\nu ; 24, 0.21) = \binom{24}{\nu} 0.21^\nu 0.79^{24-\nu}$$

Si on trace cette distribution P_B en fonction de ν , on obtient :



Cette courbe représente les fluctuations statistiques pour le comptage $x=8$ muons/5s.

Meilleure estimation de la probabilité p et de l'écart-type

Soit N , le nombre total de comptages effectués et k le nombre de fois où la condition est satisfaite (par exemple le nombre de fois où l'on a obtenu a muon/5s). Le meilleur estimateur pour le paramètre p (probabilité de succès) de la distribution binomiale est:

$$\bar{e} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_i = \frac{k}{N}$$

avec $e_i = 1$ si la condition est satisfaite et $e_i = 0$ sinon. Dans notre exemple, on a donc $\bar{e} = 0,21$, $N=24$ et $k=5$.

On a vu dans le paragraphe précédent que le meilleur estimateur pour la variance d'une valeur moyenne est $s^2(\bar{e}) = \frac{s^2}{N}$.

Ce qui donne, dans le cas d'une distribution binomiale : $s^2(\bar{e}) = \frac{p(1-p)}{N}$.

Si on remplace p par son estimateur, on a :

$$s^2(\bar{e}) = \frac{k}{N^2} \left(1 - \frac{k}{N}\right) \text{ ou encore } s^2(k) = k \left(1 - \frac{k}{N}\right)$$

et $s(k) = \sqrt{k \left(1 - \frac{k}{N}\right)}$ est appelé erreur statistique de comptage.

Dans notre exemple, on obtient :

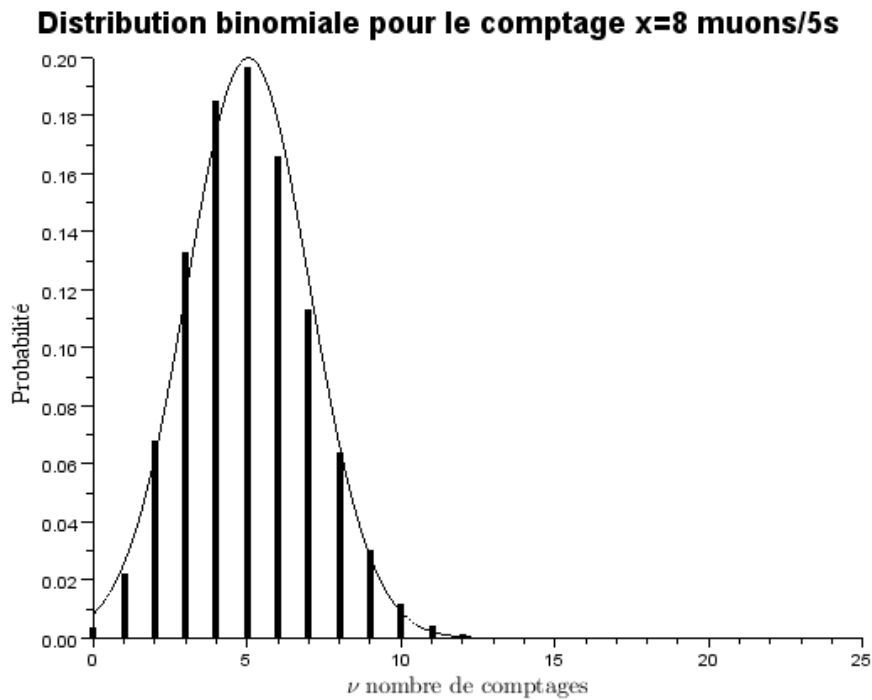
$$s(k) = \sqrt{k \left(1 - \frac{k}{N}\right)} = \sqrt{8 \left(1 - \frac{8}{24}\right)} = 2,51$$

Cas particuliers :

- Comme en général N est très grand, cette expression est le plus souvent connue sous la forme $s(k) \approx \sqrt{k}$. Dans notre cas, $s(k) \approx \sqrt{k} = \sqrt{8} = 2,8$, ce qui est une assez bonne estimation. Dans la suite de notre exposé, nous considérerons que cette formule s'applique⁶⁸ et les barres d'erreur sur les comptages seront telles que l'on aura l'intervalle $[k - \sqrt{k}; k + \sqrt{k}]$ représenté par une barre.
- Si k est grand⁶⁹, la distribution binomiale tend vers une loi normale de moyenne k et d'écart type $s(k) = \sqrt{k \left(1 - \frac{k}{N}\right)}$ (\sqrt{k} si l'efficacité de comptage est faible, c'est-à-dire que $\frac{k}{N} \ll 1$) et de moyenne $k = N\bar{e}$.

⁶⁸ Il faut néanmoins rester vigilant vis-à-vis de l'applicabilité de cette dernière formule simplifiée. Si on a un nombre de comptages N proche de 1, on doit utiliser l'expression complète pour obtenir le résultat correct.

⁶⁹ Si k est petit et que p est également petit, on est dans le cadre d'application de la loi de Poisson qui est asymétrique, ce qui conduit à un intervalle de confiance également asymétrique autour de la moyenne k .



On a superposé à la distribution précédente une gaussienne d'écart-type $\bar{s}(k) = \sqrt{k(1 - \frac{k}{N})}$ et de moyenne $k = N\bar{\epsilon} = 5$. On voit donc que même pour un comptage assez faible (ici 5), la fluctuation sur un comptage est quasiment gaussien^{70 71}.

⁷⁰ Ceci justifie les ajustements par la méthode du χ^2 que nous utilisons dans la partie suivante.

⁷¹ Dans ce cas, le résultat est donné par un intervalle: $k \pm s(k)$, qui est à 68,2% de confiance (95,4% pour $k \pm 2.s(k)$). Voir ci-dessous.

LEXIQUE

- **Antiparticule**, f
particule de même masse mais dont les charges (c'est-à-dire tous ses nombres quantiques) sont opposées à celle de la particule correspondante.
- **Baryon**, m
particule composée de trois quarks, transmettant et subissant l'interaction forte. Ex : proton et neutron.
- **Cherenkov (effet)**, m
production de lumière par une particule chargée traversant un milieu transparent à une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière dans ce milieu.
- **Chromodynamique quantique (QCD)**, f
théorie des interactions fortes, dites aussi de « couleur »
- **Coïncidence (circuit de)**, m
dispositif électronique testant la simultanéité de deux signaux. Il correspond à la fonction logique ET de l'algèbre de Boole.
- **Compton (effet)**, m
déviation d'un photon, rayon X ou gamma, par un électron libre ou faiblement lié, découverte par A. H. Compton en 1923
- **Couleur**, f
Charge (dans le sens de nombre quantique) que possèdent les sensibles à l'interaction forte.
- **Electrodynamique quantique (QED)**, f
théorie quantique des interactions électromagnétiques. Le très haut pouvoir prédictif de l'électrodynamique quantique en a fait un modèle de théorie physique.
- **Erreur aléatoire**, f
composante de l'**erreur de mesure** qui, dans des **mesurages** répétés, varie de façon imprévisible
- **Erreur de mesure**, f
Erreur, f
différence entre la **valeur mesurée** d'une **grandeur** et une **valeur de référence**.
- **Erreur systématique**, f
composante de l'**erreur de mesure** qui, dans des **mesurages** répétés, demeure constante ou varie de façon prévisible.
- **Fidélité de mesure**, f
Fidélité, f

étroitesse de l'accord entre les **indications** ou les **valeurs mesurées** obtenues par des **mesurages** répétés du même objet ou d'objets similaires dans des conditions spécifiées.

- **Freinage (rayonnement de), m**
Bremstrahlung
rayonnement émis par une particule chargée traversant un champ électrique.
- **Gerbe, f**
cascade de particules produites (notamment dans l'atmosphère) par l'impact d'un proton ou d'un noyau de très haute énergie.
- **Gluon, m**
particule qui transmet l'interaction de couleur entre les quarks.
- **Grandeur, f**
propriété d'un phénomène, d'un corps ou d'une substance, que l'on peut exprimer quantitativement sous forme d'un nombre et d'une référence.
- **Hadron, m**
particule sensible à l'interaction forte (proton, neutron, pion...)
- **Hadronique**
composé de hadrons
- **Incertitude de mesure, f**
Incertitude, f
paramètre non négatif qui caractérise la dispersion des **valeurs** attribuées à un **mesurande**, à partir des informations utilisées.
- **Incertitude-type, f**
Incertitude de mesure exprimée sous la forme d'un écart-type.
- **Jauge (théorie de), f**
En physique théorique, une théorie de jauge est une théorie des champs basée sur un groupe de métrie locale, appelé groupe de jauge, définissant une « invariance de jauge ». Le prototype le plus simple de théorie de jauge est l'électrodynamique classique de Maxwell.
- **Justesse de mesure, f**
Justesse, f
étroitesse de l'accord entre la moyenne d'un nombre infini de **valeurs mesurées** répétées et une **valeur de référence**
- **Kaon (méson K), m**
méson contenant un quark « étrange », de masse proche de 500 MeV
- **Lepton, m**

particule de base du Modèle Standard sensible à l'interaction faible et insensible à l'interaction forte.

- **Mesurage**, m
Mesure, f
processus consistant à obtenir expérimentalement une ou plusieurs valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer à une **grandeur**
- **Mesurande**, m
grandeur que l'on veut mesurer
- **Méson**, m
particule composée d'un quark et d'un antiquark, transmettant et subissant l'interaction forte. Le méson le plus connu est le pion (méson π), découvert en 1947.
- **Modèle Standard**, m
ensemble de théories comprenant la théorie électrofaible et la chromodynamique quantique, synthèse de l'essentiel des connaissances actuelles sur les particules et leurs interactions.
- **Muon (μ)**, m
particule analogue à l'électron mais de masse deux cents fois plus élevée. Le muon est l'un des leptons de base du Modèle Standard.
- **Neutrino**, m
particule de masse très faible et de charge électrique nulle. Le Modèle Standard admet trois espèces de neutrinos. Ils ne sont sensibles qu'à l'interaction faible.
- **Photocathode**, f
surface sensible d'un photomultiplicateur émettant un électron sous l'impact d'un photon.
- **Photomultiplicateur**, m
dispositif photoélectrique transformant un photon en un signal électronique.
- **Photon**, m
boson vecteur de la force électromagnétique. La lumière est constituée de photons, ainsi que les rayons X et gamma.
- **Quark**, m
composant élémentaire des particules à interaction forte. Les quarks interagissent par l'interaction dite de « couleur », correspondant à l'échange de gluons.
- **Résultat de mesure**, m
Résultat d'un mesurage, m
ensemble de **valeurs** attribuées à un **mesurande**, complété par toute autre information pertinente disponible
- **Scintillateur**, m

matériau transparent émettant de la lumière quand il est traversé par une particule chargée en mouvement. Cette lumière peut-être transformée en signal électrique à l'aide d'un photomultiplicateur.

- **Section efficace**, f
nombre exprimant la probabilité d'une interaction entre particules. Ce nombre à la dimension d'une surface.
- **Tau**, m
lepton chargé découvert en 1972, analogue à l'électron et au muon, mais de masse beaucoup plus élevée.
- **Temps de vie**, m
dans une désintégration, le temps de vie est le temps nécessaire pour que la population d'un échantillon passe de N_0 à $N_0/2$.
- **Théorie de jauge**, f
théorie permettant de décrire les interactions fondamentales à partir des symétries qu'elles conservent. Celles-ci servent de base au choix du groupe (au sens mathématique du terme) dit de jauge sur lequel est basé la théorie. Par exemple, l'électromagnétisme est basé sur le groupe U(1) de symétrie car l'interaction est invariante par changement de phase spatiale et temporelle des champs décrivant les particules.
- **Valeur vraie**, f
Valeur vraie d'une grandeur, f
valeur d'une grandeur compatible avec la définition de la **grandeur**